

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Análise dos esforços dinâmicos transmitidos pelo eixo e pistão ao
bloco de compressores herméticos**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do
grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Rodrigo Sambugari Rodrigues

Florianópolis, fevereiro de 2003.

Análise dos esforços dinâmicos transmitidos pelo eixo e pistão ao bloco de compressores herméticos

Rodrigo Sambugari Rodrigues

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM VIBRAÇÕES E ACÚSTICA,

sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Arcanjo Lenzi
Orientador

Prof. José Antônio Bellini da Cunha Neto
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Roberto Jordan
Presidente

Prof. César José Deschamps

Prof Lauro Cesar Nicolazzi

**“A guerra é o maior de todos os crimes;
no entanto, não há agressor que não
disfarce seu crime como pretexto da justiça”**

Voltaire

AGRADECIMENTOS

Ao Pai Celestial;

Aos meus pais, Dorival e Sandra, por terem contribuído e incentivado este trabalho;

Ao meu irmão, Fernando, que na busca do melhor para mim pressionava na conclusão deste trabalho;

À Fabíola, que me apoiou, incentivou e compreendeu as ausências durante a realização do trabalho;

Ao professor Arcanjo Lenzi, que com sua orientação foi de grande importância para saber por que caminho seguir;

Ao Joseval, que muito ajudou e contribuiu para a conclusão deste trabalho;

Ao Hilbert, que sempre se mostrou à disposição para sanar as dúvidas que ocorreram ao longo do trabalho;

Aos professores e amigos do LVA, pela convivência, troca de conhecimentos, aprendizado e amizade;

À EMBRACO, que muito contribuiu para realização deste trabalho;

À UFSC, por me acolher por mais este período de minha vida, me levando ao crescimento intelectual e pessoal.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Descrição do problema	1
1.2 Objetivos do trabalho.....	1
Capítulo 2 – Relações cinemáticas e dinâmicas entre as partes móveis	1
2.1 Formulação teórica das excitações reais no compressor	1
2.2 Relação entre variáveis e aceleração do pistão	1
2.3 Esforços no pistão, biela e excêntrico.....	1
2.4 Balanço de forças no eixo de acionamento.....	1
2.5 Determinação das forças laterais no pistão	1
2.6 Esforços transmitidos.....	1
Capítulo 3 Rigidez e amortecimento do mancal tipo filme de óleo.....	1
3.1 Introdução	1
3.2 Revisão bibliográfica.....	1
3.3 Rigidez e amortecimento do mancal	1
Capítulo 4- Esforços transmitidos através dos mancais	1
4.1 Análise de um sistema de 1 grau de liberdade	1
4.2 Sistema de 1 GL com forças reais de compressão do gás	1
4.2.1 Modelo com valores constantes de rigidez e amortecimento.....	1
4.2.2 Modelo com rigidez e amortecimento variáveis	1
4.3 Esforços transmitidos pelo mancal superior	1
4.4 Sistema com mancal superior e inferior	1
Capítulo 5 – Respostas do conjunto motor-compressor às forças de compressão do gás.....	1
5.1 Modelo numérico do conjunto motor-compressor	1
5.2 Efeito da espessura do filme de óleo nas forças transmitidas	1
Capítulo 6 – Conclusões.....	1
Referências bibliográficas	1
Apêndice A - Método diferenças finitas.....	1

Lista de Figuras

Figura 1.1: Vista em corte de compressor hermético alternativo.	1
Figura 1.2: Resposta temporal, espectro em frequência e espectro em 1/3 de banda de oitava da pressão no cilindro.	1
Figura 1.3: Comportamento temporal, espectro de frequência e espectro em 1/3 de banda de oitava da aceleração em um ponto do bloco.	1
Figura 1.4: Modelo de uma dimensão do modelo pistão/biela/eixo/mancais.....	1
Figura 2.1: Limites de posição.....	1
Figura 2.2: Posições do pistão – a) $\alpha = 0^\circ$; b) $\alpha > 0^\circ$	1
Figura 2. 3: Composição da massa adicional do pistão e biela.	1
Figura 2. 4: Balanço de forças no pistão.	1
Figura 2. 5: Balanço de forças no eixo de acionamento do compressor.	1
Figura 2. 6: Perfil de pressão no cilindro (azul) e força no topo do pistão (rosa).	1
Figura 2. 7: Força à pressão no cilindro, força lateral no topo do cilindro deslocamento 6 mm senoidal (vermelha), força lateral no topo do cilindro e no centro (azul).....	1
Figura 2. 8: Forças de pressão e força resultante na biela.	1
Figura 2. 9: Forças no mancal superior.	1
Figura 2. 10: Forças no mancal inferior.	1
Figura 2. 11: Forças de contrapesos, inércia do pistão e excêntrico.	1
Figura 2. 12: Posições das partes móveis em sincronismo com o perfil de pressão e aceleração do pistão.	1
Figura 2. 13: Espectro de banda estreita dos sinais de força lateral com e sem deslocamento do centro do pistão quando a válvula de descarga está aberta.	1
Figura 2. 14: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força lateral com e sem deslocamento do centro do pistão, quando a válvula de descarga está aberta.	1
Figura 2. 15: Espectros em banda estreita dos sinais de força na biela e força no mancal na direção do pistão.....	1
Figura 2. 16: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força na biela e força no mancal na direção do pistão.	1

Figura 2. 17: Espectros em banda estreita dos sinais de força no mancal na direção transversal e na direção do pistão.	1
Figura 2. 18: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força no mancal na direção transversal e na direção do pistão.	1
Figura 2. 19: Espectros em banda estreita dos sinais de força no mancal superior e inferior, na direção do pistão.	1
Figura 2. 20: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força no mancal superior e inferior, na direção do pistão.	1
Figura 3. 1: Efeitos de filme de óleo espremido e cunha.	1
Figura 3. 2: Configuração do compressor rotativo com duas unidades de compressão.	1
Figura 3. 3: Detalhes do mancal realizado experimento Burrows <i>et al</i> [13].	1
Figura 3. 4: Geometria dos mancais.	1
Figura 3. 5: Órbitas dos mancais adimensional, em azul mancal superior e vermelho mancal inferior.	1
Figura 3. 6: Rigidez para o mancal superior.	1
Figura 3. 7: Rigidez para o mancal inferior.	1
Figura 3. 8: Amortecimento para o mancal superior.	1
Figura 3. 9: Amortecimento para o mancal inferior.	1
Figura 4. 1: Sistema com um grau de liberdade.	1
Figura 4. 2: Força de excitação harmônica.	1
Figura 4. 3: Resposta do deslocamento do sistema de um grau de liberdade calculado pelo método de diferenças finitas, partindo do estado de repouso. A curva em tracejado mostra a resposta nesta mesma frequência considerando regime estacionário.	1
Figura 4. 4: Receptância para 1 GL.	1
Figura 4. 5: Força de excitação do sistema.	1
Figura 4. 6: Resposta do modelo para força real.	1
Figura 4. 7: Influência de cada elemento na formação da força transmitida.	1
Figura 4. 8: Espectros em 1/3 de oitava das forças do sistema.	1
Figura 4. 9: Deslocamento modelo com rigidez e amortecimento variável.	1
Figura 4. 10: Influência de cada elemento na formação das forças para valores de rigidez e amortecimento variados.	1
Figura 4. 11: Espectros em 1/3 de oitava das forças do sistema para valores de rigidez e amortecimento variáveis ao longo do ciclo.	1
Figura 4. 12: Modelo do mancal superior.	1
Figura 4. 13: Forças transmitidas na direção x, somente pelo mancal superior.	1

Figura 4. 14: Forças transmitidas na direção x, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 15: Forças transmitidas na direção y, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 16: Forças transmitidas na direção y, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 17: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 18: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 19: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 20: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, somente pelo mancal superior.	1
Figura 4. 21: Modelo para quatro graus de liberdade.	1
Figura 4. 22: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção x.	1
Figura 4. 23: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção x.	1
Figura 4. 24: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção y.	1
Figura 4. 25: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção y.	1
Figura 4. 26: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, no mancal superior.	1
Figura 4. 27: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, no mancal superior.	1
Figura 4. 28: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, no mancal superior.	1
Figura 4. 29: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, no mancal superior.	1
Figura 4. 30: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção x.	1
Figura 4. 31: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção x.	1
Figura 4. 32: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção y.	1
Figura 4. 33: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção y.	1
Figura 4. 34: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, pelo mancal inferior.	1
Figura 4. 35: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, pelo mancal inferior.	1
Figura 4. 36: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, pelo mancal inferior.	1
Figura 4. 37: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, pelo mancal inferior.	1
Figura 5. 1: Modelo numérico do kit – forças na direção do pistão.	1
Figura 5. 2: Modelo numérico do kit – forças na direção transversal.	1
Figura 5. 3: Diferença entre centro do mancal e centro do eixo.	1
Figura 5. 4: Posição dos centros de eixo e biela - a) Fixo – b) Variável no tempo.	1
Figura 5. 5: Órbitas calculadas para um determinado mancal.	1
Figura 5. 6: Órbita e sua derivada com relação ao tempo.	1
Figura 5. 7: Perfis da força no mancal superior para	1

Figura 5. 8: Força no mancal superior – folga zero (cinemática) / folga 200 μm . Banda estreita.....	1
Figura 5. 9: Força no mancal superior – folga zero (cinemática) / folga 200 μm . Banda de 1/3 de oitava.....	1
Figura 5. 10: Força no mancal superior – (diferença finitas - vermelha) / (cinemática – azul). 1	
Figura 5. 11: Força no mancal superior – (cinemática - vermelha) / (diferenças finitas – azul).	1
Figura 5. 12: Comparação numérica x experimental – Modelo do kit. Batente de molas – direção do pistão e transversal.	1
Figura A. 1: Função genérica.....	1

Lista de Tabela

Tabela 3. 1: Coeficientes de rigidez e de amortecimento em filmes de óleo (valores médio, máximo e mínimo).	1
---	---

Lista de Símbolos

a_{cp}	aceleração contrapeso
A_p	área do pistão
c	amortecimento
C_c	amortecimento crítico
$c_{xx,xy,yy,yx}$	amortecimento nos mancais
d_1	distância entre a linha central do pistão e aplicação da força F_p
$d_{cp0,1,2}$	distância entre contrapeso e mancal superior
d_{F1}, d_{F2}	distância entre o pino do pistão e a forças laterais
d_{m1}	distância entre mancal superior e excêntrico
d_{m2}	distância entre mancal superior e mancal inferior
$desl$	distância entre o centro do eixo e a linha central do pistão
$f(t)$	força de excitação em função do tempo
$F_0(\omega)$	força em função da frequência
F_1, F_2	forças laterais no pistão
F_b	força na biela
$F_{cp0,1,2}$	forças contrapeso
F_e	força devido ao excêntrico
F_{m1}	força mancal superior
F_{m2}	força mancal inferior
F_p	força no pistão
h	espessura do filme de óleo
h_1	distância entre centro de gravidade do eixo-rotor e excêntrico
h_2	distância entre centro de gravidade do eixo-rotor e mancal superior
h_3	distância entre centro de gravidade do eixo-rotor e mancal inferior
j	número imaginário
$J_{\phi e}$	momento polar de inércia do eixo orientação x
$J_{\gamma e}$	momento polar de inércia do eixo orientação y
k	rigidez
$k_{xx,xy,yy,yx}$	rigidez nos mancais
L_1	distância entre centro de gravidade da biela e excêntrico
L_2	distância entre centro de gravidade da biela e pistão
L_b	comprimento da biela
L_e	comprimento entre centro do eixo e centro do excêntrico
M	massa
m_e	massa total que compõe o eixo (eixo, excêntrico, rotor, contrapesos)
m_{et}	massa total que compõe o eixo (eixo, excêntrico, rotor, contrapesos) + parcela da biela
m_b	massa biela
m_{cp}	massa contrapeso
m_p	massa pistão
m_{pt}	massa pistão + parcela da biela
p	pressão filme de óleo
P_p	perfil de pressão na câmara de compressão
$r_{cp0,1,2}$	distância entre centro do eixo e contrapesos 0, 1 e 2
t	tempo
U, V, ω	velocidades do filme de óleo na resolução da equação de Reynold

w	ângulo de simetria de pistão e biela
w_i	ângulo da biela no PMI
w_s	ângulo da biela no PMS
y_e	deslocamento do eixo longitudinal ao movimento do pistão
y_{eixo}	posição inicial do pistão
y_p	posição do pistão
y_{max}	deslocamento máximo do pistão
y_{min}	deslocamento mínimo do pistão
$x(t)$	deslocamento em função do tempo
x_e	deslocamento do eixo transversal ao movimento do pistão
x_i	posição no instante t
x_{i+1}	posição no instante $t+1$
x_{i-1}	posição no instante $t-1$
$X(\omega)$	deslocamento em função da frequência

Símbolos gregos

α	ângulo entre a linha de centro do eixo e excêntrico
$\alpha(\omega)$	receptância
Δt	tempo entre pontos de cálculos
ρ	massa específica
μ	viscosidade
ξ	razão de amortecimento
ω	frequência de funcionamento do compressor
ω_t	frequência natural não amortecida

sub índices

es	mancal superior
ei	mancal inferior
x	direção longitudinal ao movimento do pistão
y	direção transversal ao movimento do pistão

Resumo

O controle de ruído gerado por compressores herméticos tem sido motivo de preocupação crescente por parte de fabricantes destes produtos, a fim de satisfazer às exigências do mercado consumidor. Por isso torna-se necessário conhecer todos os mecanismos dominantes de ruído e vibrações internas no conjunto motor-compressor, para a definição dos procedimentos mais viáveis de controle.

Este trabalho baseou-se em um modelo de compressor hermético de pistão único. Foram analisados os efeitos do filme de óleo de lubrificação presentes entre os componentes de transmissão de força (pistão, biela, eixo) sobre as forças transmitidas ao bloco. As vibrações do conjunto motor-compressor são excitadas principalmente pelas forças de compressão do gás e são transmitidas à carcaça através das molas de suspensão e pelo tubo de descarga. Os esforços causados pela compressão do gás são transmitidos entre as partes móveis, através dos filmes de óleo. Uma análise das características de rigidez e amortecimento destes filmes de óleo foi realizada a partir da órbita de movimento.

Os esforços em cada instante do ciclo foram calculados através da solução das equações de movimento obtidas por diferenças finitas. Os esforços calculados foram usados em um modelo numérico do conjunto motor-compressor, sendo suas respostas comparadas a resultados obtidos experimentalmente.

Abstract

In order to satisfy the market requirements, the control of noise generated by hermetic compressors has been a constant concern within the manufacturer of these products. Hence, in order to identify the most suitable controlling process, it is important to understand all the internal mechanisms of noise and vibration excitation into the motor-compressor unit.

This work is based in a model of a single piston hermetic compressor. The gas is compressed by means of a piston/con-rod/crankshaft mechanism. An analysis of the lubrication oil film effects over the strengths transmitted to the block is carried out in this work. These effects are present at the strength transmission components (piston/con-rod/crankshaft). The motor-compressor unit vibrations are excited mainly by the gas compression strengths and are transmitted to the shell through the suspension springs and the discharge pipe. The strengths caused by the gas compression are propagated within the moving parts, through the oil film present within it. An analysis of stiffness and damping characteristics of these oil films is carried out from the journal bearing.

The solution of the momentum equations via finite differences gives the strengths at each instant of the cycle. The strengths calculated are then used in a numerical modeling of the motor-compressor unit, where the numerical results are compared with experimentals.

Capítulo 1 - Introdução

Os sistemas de refrigeração por compressão mecânica de vapores são utilizados em ampla escala e em diversas aplicações na sociedade. O compressor alternativo é o tipo mais amplamente utilizado na área da refrigeração, principalmente em aplicações domésticas. Quase todas as aplicações de pequeno porte, tais como geladeiras, congeladores e aparelhos de ar condicionado residencial utilizam compressores herméticos. Nestes sistemas o componente responsável pelo bombeamento do fluido refrigerante através do circuito de refrigeração é o compressor. Grande parte dos compressores fabricados atualmente é do tipo alternativo, onde a compressão é realizada pelo deslocamento linear e alternado de um pistão.

Além de custos, desempenho, confiabilidade e consumo de energia, o controle do ruído é um dos principais itens a serem analisados no projeto de um compressor. Modelar partes separadas dos componentes presentes em máquinas é importante, pois pode informar o quanto cada componente contribui para o nível global do ruído, e a partir dos dados coletados, saber quais as principais alterações necessárias para uma otimização do sistema.

1.1 Descrição do problema

Os compressores herméticos são envolvidos externamente por uma carcaça que consiste de duas partes soldadas hermeticamente. Junto à carcaça estão componentes como a placa-base, cuja função é fixar o corpo do compressor ao equipamento de refrigeração; o terminal hermético, que faz a conexão elétrica entre a rede elétrica e o interior, e o limitador

de oscilação que evita danos durante o transporte. Ainda, fixo ao corpo do compressor estão os passadores de sucção e descarga que permitem que o gás seja succionado para dentro do compressor e descarregado, respectivamente. Um terceiro passador, o de processo, é utilizado para carregar o sistema com gás refrigerante ou para evacuá-lo.

Na parte interna da carcaça estão os componentes elétricos e mecânicos. Estes, por sua vez, consistem de um motor elétrico conectado ao compressor por meio de um eixo, sendo que o mecanismo responsável pela conversão de movimento rotativo do motor em alternativo do pistão do compressor é do tipo biela-manivela.

Fixado ao rotor encontra-se a bomba responsável por levar o óleo lubrificante depositado no fundo da carcaça do compressor, através de rasgos até as partes superiores do compressor, que necessitam de lubrificação.

O gás refrigerante entra no compressor através de um passador de sucção, sendo então succionado para as câmaras de amortecimento da pulsação sonora e, em seguida, para o interior do cilindro, passando pela válvula de sucção. No cilindro sofre compressão e cruza a válvula de descarga até a câmara de descarga e, em seguida, as câmaras de amortecimento. Na sequência, o gás é conduzido por um tubo, até o passador de descarga.

Durante o ciclo de compressão o pistão desloca-se desde o ponto morto inferior (PMI), até o ponto morto superior (PMS). O volume ocupado pelo gás, quando o pistão chega ao PMS é chamado de volume morto.

A Figura 1.1 mostra um corte de um modelo de compressor hermético alternativo, normalmente utilizado em equipamentos de refrigeração doméstica, onde se podem identificar os componentes e sua disposição no conjunto.

Durante o curso do pistão entre o PMI e o PMS o gás sofre compressão, elevando a sua temperatura e perdendo calor para as paredes. A pressão eleva-se até que a válvula de descarga se abra. A partir deste momento, o pistão continua a subir até atingir o PMS. O pistão passa, então, a se deslocar no sentido oposto até que a pressão se torne insuficiente para manter a válvula aberta. Enquanto o pistão desce, cai a temperatura e a pressão dos gases até que se atinja a pressão de sucção, quando se abre a válvula de sucção, admitindo mais gás que se mistura com o remanescente no cilindro devido à existência do volume morto. Todo este processo faz com que ocorra geração de vibração e ruído no sistema.

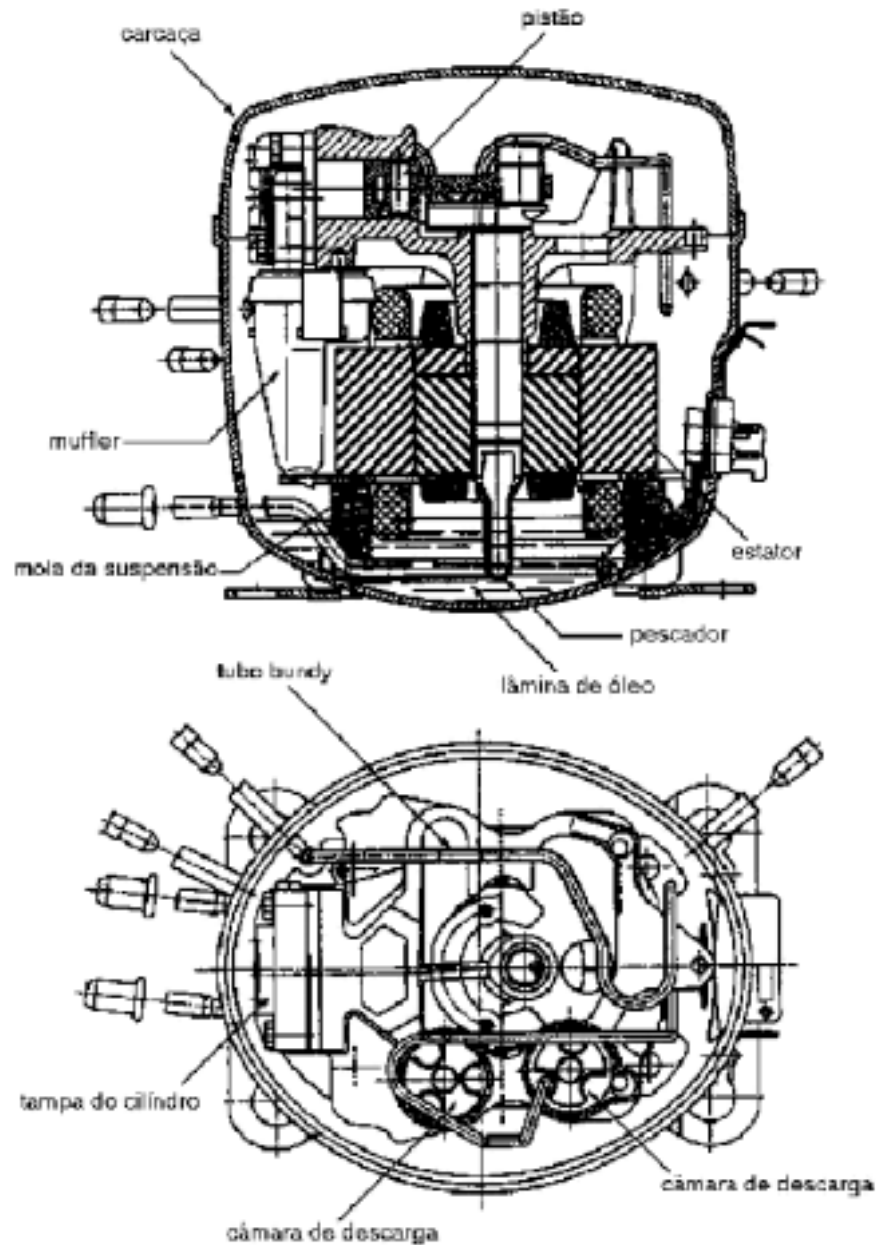


Figura 1.1: Vista em corte de compressor hermético alternativo.

As energias vibratórias geradas internamente, no bloco, são transmitidas à carcaça por excitação mecânica, através das molas e tubo de descarga, e por excitação acústica, pelo gás contido na cavidade, que é excitado pelas pulsações do sistema de câmaras de sucção. Da carcaça as vibrações são transmitidas para todo o sistema de refrigeração, além de haver irradiação direta do ruído pela carcaça.

Os mecanismos de geração de ruído e vibração em compressores herméticos localizam-se principalmente no bloco, que durante cada ciclo é excitado pelas bruscas variações de pressão no cilindro e pelo fluxo de gás no sistema de câmaras de descarga,

conforme pode ser visualizado na Figura 1.2. Esta mostra um exemplo da variação da pressão no gás no cilindro. Constata-se a geração das vibrações, na forma de aceleração, no instante da abertura da válvula de descarga. Nestes instantes, a força resultante sobre o pistão e sobre a placa de válvulas apresenta maiores variações com o tempo e maiores valores, proporcionando, assim, maior capacidade de excitação. Análises destes sinais de resposta na forma de energia indicam claramente a contribuição destes instantes do ciclo como um importante mecanismo de geração de vibração do conjunto interno motor-compressor, denominado *kit*.

As forças que atuam sobre o pistão e sobre a placa de válvula são facilmente determinadas através das medições da pressão do gás no cilindro.

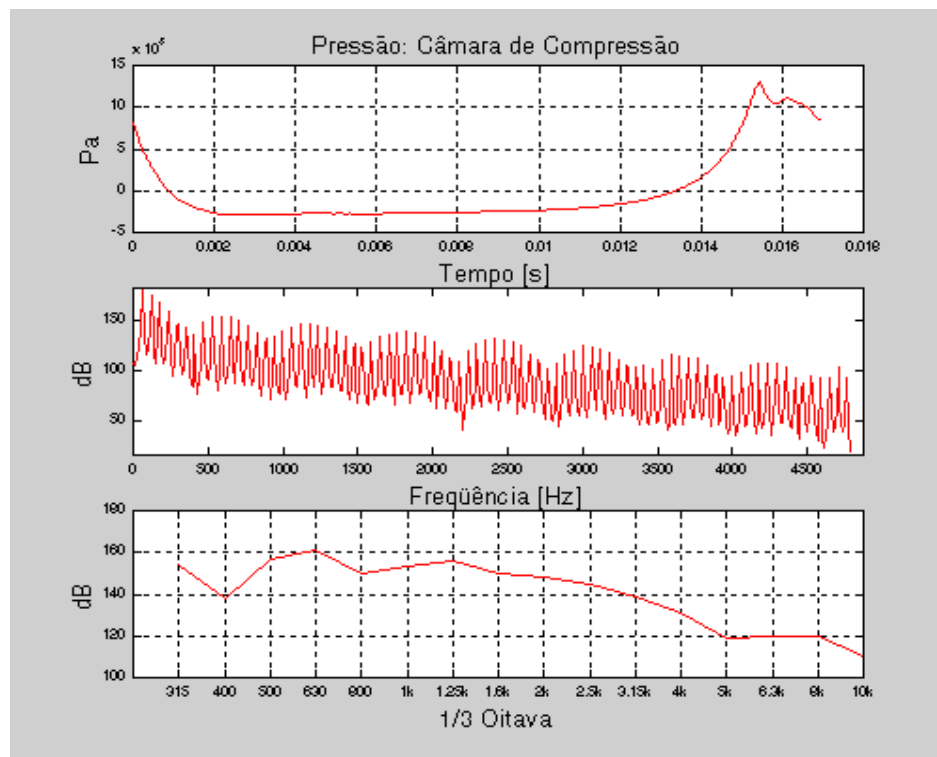


Figura 1.2: Resposta temporal, espectro em frequência e espectro em 1/3 de banda de oitava da pressão no cilindro.

A Figura 1.3 mostra sinal de aceleração medido em um ponto do bloco em função do tempo, em banda estreita e em faixas de 1/3 de oitava. Estes são dados experimentais obtidos de compressores em condições normais de teste.

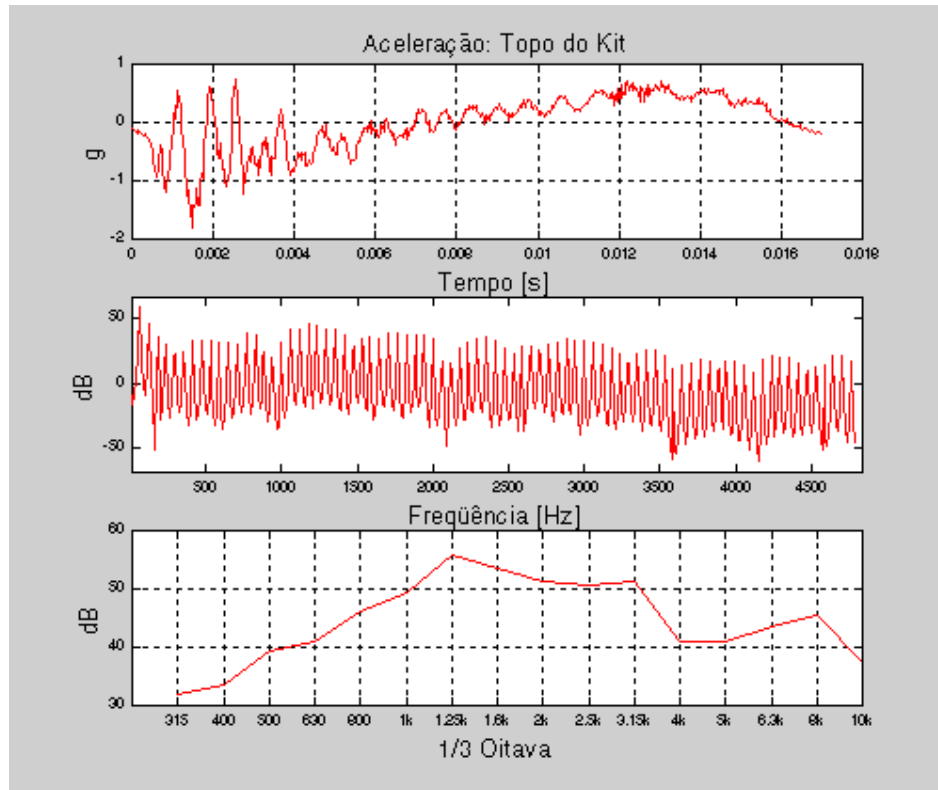


Figura 1.3: Comportamento temporal, espectro de frequência e espectro em 1/3 de banda de oitava da aceleração em um ponto do bloco.

Trabalhos experimentais como desenvolvidos por Crucq J. [1] avaliaram um compressor de refrigeração de 120W, do tipo alternativo e com uma carcaça hermeticamente fechada. O gás refrigerante Freon era comprimido pelo mecanismo de pistão/biela/eixo, acionado por um motor de corrente alternada. O compressor operava em condições padrão de 13,6 Bar de pressão de descarga, e 1,26 Bar de pressão de sucção, a 90 °C. Para cada ciclo havia a seqüência das ocorrências: (1) sucção do gás no cilindro; (2) compressão; (3) descarga do gás pressurizado. Este processo era periódico e o espectro do ruído e da vibração consistiam principalmente em harmônicos na frequência de rotação.

Segundo Crucq J. a transmissão de ruído e vibração da unidade do motor-compressor para a carcaça se dá por quatro possíveis caminhos, sendo eles:

1. o gás refrigerante entre a carcaça e o compressor;
2. o óleo no fundo da carcaça que é utilizado para lubrificação e resfriamento;
3. o tubo de descarga;
4. as molas de suspensão.

Também verificou-se que as duas principais fontes de ruído em compressores herméticos são: (1) irradiação do *muffler* de sucção para a cavidade; (2) vibrações do sistema eixo/biela/pistão, excitado pela variação da pressão do gás nestes componentes.

Mufflers são filtros acústicos usados nas linhas de sucção e de descarga do gás, com o objetivo de reduzir a amplitude das ondas sonoras que são transmitidas através destas linhas.

O modelo do *muffler* de sucção desenvolvido pelo autor considerou o fluxo de massa, $\dot{m}(t)$ [kg/s], para o interior do cilindro como dado de entrada, calculado a partir de um programa de simulação termodinâmica. O *muffler* foi modelado como um sistema de câmaras unidas por tubos. A função transferência foi calculada até 2.000 Hz.

O *muffler* de sucção irradia energia sonora para o interior da cavidade, principalmente através do seu bocal. A pressão sonora da cavidade, por sua vez, excita a carcaça fazendo-a vibrar e, conseqüentemente, irradiar ruído. O mecanismo principal de geração de energia sonora é atribuído ao movimento da válvula de sucção. Devido à sua característica de movimento transiente, o espectro da energia, gerado é amplo, distribuindo-se ao longo de largas faixas de frequência. As ressonâncias próprias do *muffler*, que costumam ser da ordem de quilohertz, são fortemente excitadas.

Durante a abertura, a válvula de sucção flutua com uma frequência que é função da sua rigidez e inércia, e do carregamento distribuído exercido pelo fluxo de gás.

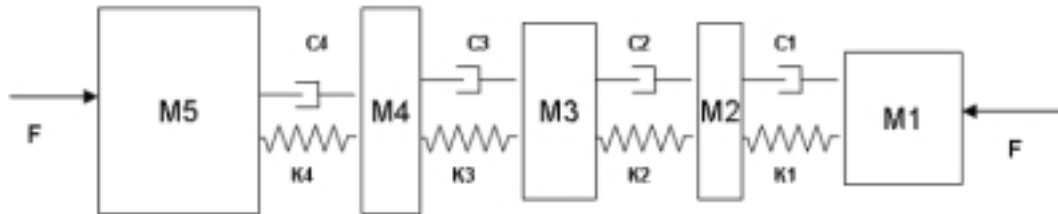
O objetivo do uso do *muffler* de sucção, portanto, consiste em atenuar principalmente as amplitudes das ondas geradas na frequência de flutuação da válvula, que costuma ter valor compreendido na faixa de 300 a 400 Hz, aproximadamente, e das ondas de altas frequências, geradas pelo movimento transiente e brusco da válvula.

Na linha de descarga, o gás comprimido no cilindro força a abertura da válvula, proporcionando um fluxo altamente transiente e turbulento, principalmente no volume da tampa de válvula. Estas duas características do escoamento na descarga geram excitações de espectro amplo ao longo das superfícies internas dos volumes do bloco e do tubo de descarga. Os volumes usados na linha de descarga destinam-se a atenuar as pulsações geradas na frequência de abertura da válvula de descarga (60 Hz).

Dentre os *mufflers* usados em compressores herméticos, o de sucção requer um dimensionamento preciso e otimizado, devido às necessidades de maximizar o fluxo de massa de gás para o interior do cilindro e de minimizar a irradiação sonora para a cavidade, através do bocal.

Costumam ser usados *mufflers* do tipo reativo, constituídos, normalmente de duas câmaras de expansão, interligadas por tubos.

O trabalho de Crucq mostrou também que com o compressor em funcionamento a causa do ruído e vibração de baixa frequência são forças provocadas por desbalanceamentos, as quais também exibem uma série de transientes. As medições mostram que os transientes ocorrem durante a fase de alta compressão, especialmente no momento de abertura e fechamento da válvula de descarga. Os estudos mostraram que isto ocorre além da força de compressão do gás, também pela dinâmica do mecanismo pistão/biela/eixo. A Figura 1.4 mostra um modelo em uma dimensão proposto para o sistema, representado por uma série de massas, rigidez e amortecimentos. A força F atua nas massas do pistão e do mancal, mas com direções opostas. A força sobre o pistão (M_1) é transferida para a biela ($M_2 =$ olhal menor e $M_3 =$ olhal maior), eixo (M_4) e mancal (M_5). As forças tornam-se somente iguais se as conexões das massas tiverem rigidez infinitamente altas e as massas muito pequenas. Como isso não ocorre, o gás força as massas a apresentarem movimentos relativos, especialmente no momento de grandes variações de pressão (descarga do gás).



**Figura 1.4: Modelo de uma dimensão do modelo pistão/biela/eixo/mancais
Apresentado por C. Crucq *et al* [1].**

A força do gás foi calculada por um programa de simulação termodinâmica. Entretanto, devido à baixa precisão, foram usados valores medidos da pressão no cilindro do compressor.

O grande desafio foi estimar parâmetros como a rigidez, calculado pela Teoria de Hertz, além de outros métodos não mencionados para contato e filmes de óleo. Por fim, os valores usados por Crucq para a rigidez e amortecimento foram:

- Mancal do olhal menor: $k_1 = 3 \times 10^7$ N/m
 $C_1 = 5 \times 10^3$ Ns/m
- Biela: $k_2 = 5 \times 10^7$ N/m
 $C_2 = 5$ Ns/m
- Olhal maior da biela: $k_3 = 2 \times 10^8$ N/m
 $C_3 = 1 \times 10^4$ Ns/m

- Mancais eixo/bloco: $k_4 = 2 \times 10^8 \text{ N/m}$
 $C_4 = 1 \times 10^5 \text{ Ns/m}$

O bloco foi considerado como um corpo rígido. O autor não apresenta dados ou resultados a respeito da irradiação direta de componentes móveis para a cavidade, bem como das vibrações transmitidas através das molas.

Deve-se também mencionar a presença de forças de origem eletromagnética, assunto abordado por Paiotti [2]. Segundo o autor as forças podem excitar não apenas as ressonâncias estruturais das lâminas do estator, mas todo o conjunto moto-compressor, principalmente em altas frequências, indicando que podem contribuir tanto para a geração de vibrações no conjunto motor-compressor quanto para a irradiação de ruído para a superfície do estator, excitando o espaço interno do compressor (cavidade).

As vibrações do sistema eixo/biela/pistão (*kit*) representam uma das principais fontes de ruído em um compressor, o que justifica a importância deste trabalho.

1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho é baseado em um compressor de refrigeração do tipo alternativo, com carcaça hermeticamente fechada. A parte interna do compressor tem como principal ponto de contato as molas, que sustentam o *kit* pelo fundo da carcaça, sendo a principal via de fluxo de energia vibratória.

Este trabalho de dissertação tem como objetivo avaliar as componentes das forças transmitidas pelos elementos móveis (pistão/biela/eixo) e mancais. Primeiramente, estes componentes são considerados ligados rigidamente e, posteriormente, incluindo o filme de óleo como um elemento que pode adicionar amortecimento e rigidez para o sistema formado pelos elementos móveis. Desta forma, busca-se avaliar a influência do filme de óleo sobre o mecanismo do compressor.

No Capítulo 2 será realizada uma análise dos esforços transmitidos através dos principais elementos em estudo (pistão, biela, eixo e mancais), como se não houvesse a presença do filme de óleo, ou seja, considerando contato direto entre os componentes. Mostra-se como o problema é abordado nesta primeira análise, o sistema de coordenadas usadas, as simplificações realizadas, o sistema de equações, os valores encontrados e os efeitos dos componentes, seguidos de uma breve conclusão.

No Capítulo 3, um estudo da rigidez e do amortecimento em mancais através do filme de óleo é explanado. Uma revisão bibliográfica do que foi estudado é apresentada buscando uma conexão com a área de vibrações e acústica. A demonstração da teoria utilizada, bem como valores de rigidez e amortecimento obtidos e utilizados nestes estudos, é o objetivo principal do trabalho, mostrando o equacionamento desenvolvido para este propósito.

No Capítulo 4, a análise dos esforços transmitidos através das partes móveis, considerando o filme de óleo será o foco. Partindo de um modelo simples com valores de rigidez e amortecimento constantes e com apenas um grau de liberdade busca-se a comprovação do método, estendendo para um modelo que englobe a presença de valores de rigidez, amortecimento e forças dependentes do tempo com uma geometria semelhante ao sistema real.

O Capítulo 5 mostra a aplicação dos esforços mecânicos no modelo numérico do *kit* do compressor e como a variação das forças nos mancais pode afetar as respostas dinâmicas.

Finalmente, o Capítulo 6, apresenta os avanços alcançados, as limitações detectadas, as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Na sequência, são apresentadas as referências bibliográficas e o Apêndice A.

Capítulo 2 – Relações cinemáticas e dinâmicas entre as partes móveis

O funcionamento do compressor hermético, mais especificamente referente à compressão do gás, é baseado no sistema de giro de um eixo impulsionado por um motor de indução. Este possui um semi-eixo excêntrico atuando como manivela que, juntamente com a biela, produzem as variações na posição do pistão. Esta variação de posição permite ao conjunto, dependendo da posição angular, succionar ou comprimir o gás refrigerante no cilindro.

Neste Capítulo serão desenvolvidas as equações que governam as posições das partes móveis do compressor (pistão, biela, manivela ou eixo-excêntrico), bem como a determinação dos esforços envolvidos durante a compressão do gás. Nos Capítulos seguintes serão considerados os esforços transmitidos ao bloco através dos filmes de óleo.

2.1 Formulação teórica das excitações reais no compressor

A mais importante contribuição na cinemática das partes móveis é a variação da pressão no cilindro do bloco. Durante a abertura da válvula de descarga, o perfil de pressão, além de alcançar seus níveis máximos, é bastante alterado. Um outro ponto importante é o fato da localização da saída de gás, na tampa de válvula não ser concêntrico ao eixo do pistão.

Todas estas variáveis devem ser completamente explanadas a fim de determinar aquelas de maior contribuição para as vibrações do conjunto bloco-estator.

As equações que regem a cinemática das partes móveis do compressor foram revistas, considerando o desalinhamento entre o eixo do mancal e o eixo do pistão. Para a composição das forças que agem nos mancais, foi considerado que o ponto de aplicação da força devido à pressão no cilindro possa variar na sua linha central. Com isso, foram obtidos os sinais de força lateral, força devido à pressão na tampa de válvula e forças nos mancais (superior e inferior).

O procedimento básico consiste em estabelecer o equilíbrio de forças no pistão, devida à variação da pressão no cilindro, determinar as reações na biela, e fazer a composição dos esforços no excêntrico e no eixo do compressor.

2.2 Relação entre variáveis e aceleração do pistão

Inicialmente, serão obtidas as equações que governam os movimentos das partes móveis, conjunto responsável pelo bombeamento de gás no compressor (pistão, biela e excêntrico). O centro do eixo de acionamento do compressor é considerado fixo.

O primeiro passo a ser analisado são os ângulos onde ocorrem os deslocamentos máximo e mínimo do pistão, também chamados ponto-morto inferior e ponto-morto superior, respectivamente. Pela Figura 2.1 e Equações 2.1 e 2.2 podem-se determinar as posições de máximo e mínimo deslocamento do pistão. Além disso, observa-se a distância entre o centro do eixo do compressor e a linha central do pistão (*desl*). Devido a isto, o ponto morto superior ocorrerá com biela e manivela alinhadas a 180°, porém inclinadas com relação ao eixo de simetria do pistão. No ponto morto inferior, o alinhamento é de 0°.

Desta forma, podem-se determinar as posições extremas do pistão através das equações:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_{\text{eixo}} + y_p(w_i) \\ y_{\min} &= y_{\text{eixo}} + y_p(w_s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$w_s = \sin^{-1} \left[\frac{\text{desl}}{L_b + L_e} \right] \quad w_i = \sin^{-1} \left[\frac{\text{desl}}{L_b - L_e} \right] \quad (2.2)$$

A seguir, serão determinadas as forças transmitidas. Na Figura 2.2, tem-se duas posições do ângulo de giro do excêntrico no plano da biela (2.2a, $\alpha = 0^\circ$ / 2.2b, $\alpha > 0^\circ$). Além da massa do excêntrico, existem as massas dos contrapesos (cp) que estão representadas.

Considera-se que os centros de gravidade dos contrapesos estão alinhados com o centro do eixo e o centro do excêntrico. É possível observar como a força da biela (F_b) atua e como as suas componentes estão determinadas.

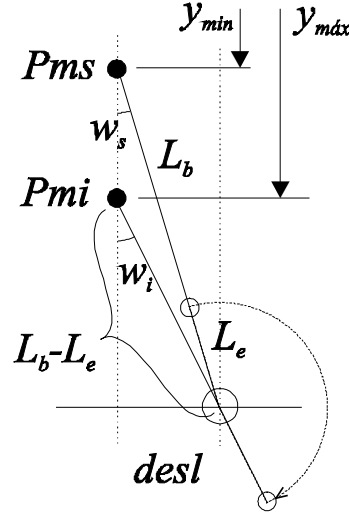


Figura 2.1: Limites de posição.

Outras relações geométricas auxiliam o desenvolvimento das equações como, por exemplo, entre os ângulos da linha de simetria do pistão e biela (w), linha de centro do eixo e excêntrico (α) e o desalinhamento existente entre os eixos do compressor e do pistão ($desl$). São determinadas através das seguintes expressões

$$L_b \sin w = desl + L_e \sin \alpha \quad (2.3)$$

$$w = \sin^{-1} \left(\frac{desl + L_e \sin \alpha}{L_b} \right) \quad (2.4)$$

$$L_b^2 = (desl + L_e \sin \alpha)^2 + (L_b \cos w)^2 \quad (2.5)$$

$$\cos w = \left(1 - \frac{(desl + L_e \sin \alpha)^2}{L_b^2} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

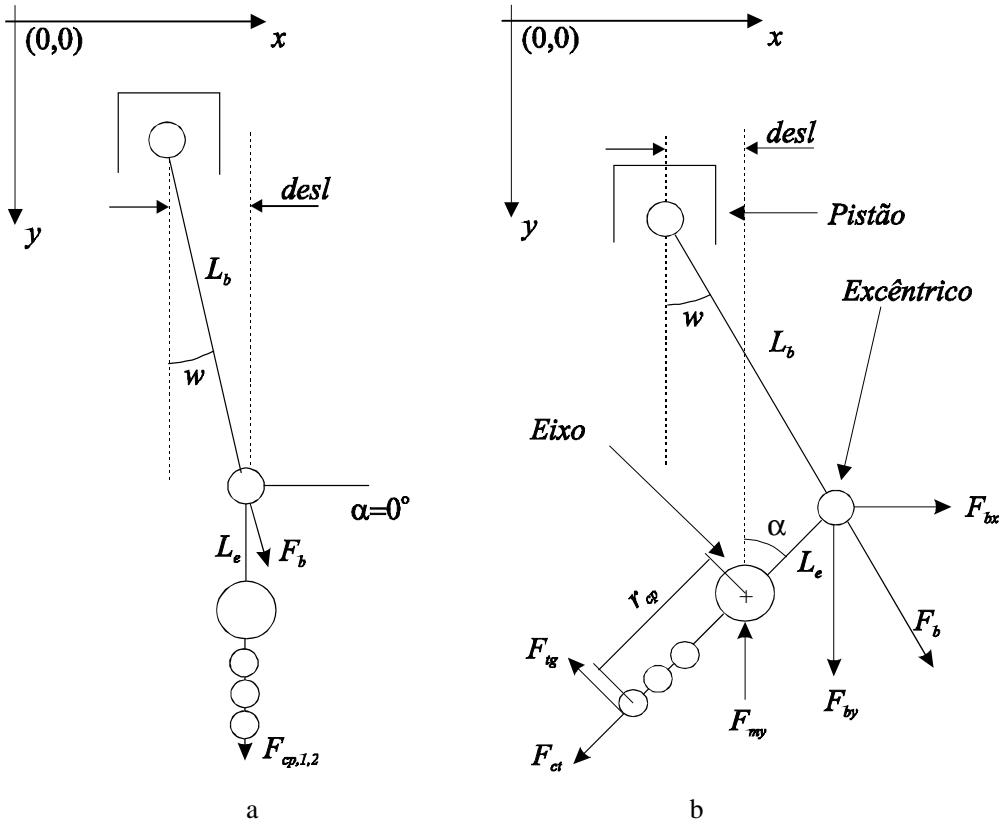


Figura 2.2: Posições do pistão – a) $\alpha = 0^\circ$; b) $\alpha > 0^\circ$.

O ângulo α representa o giro do eixo e, portanto, está diretamente relacionado à frequência de rotação do compressor, pouco abaixo de 60 Hz, devido às perdas existentes e que determinam a eficiência elétrica. Estabelecendo uma variação angular temporal do acionamento, na frequência de funcionamento do compressor, pode-se escrever:

$$\alpha = \omega t \quad (2.7)$$

e deduzir o posicionamento linear do pistão a partir de um sistema de coordenadas com origem genérica,

$$y_p(t) = y_{eixo} - L_e \cos(\omega t) - L_b \cos w \quad (2.8)$$

Derivando a Equação (2.8) em relação ao tempo obtém-se a velocidade do pistão, e uma segunda derivada fornece a sua aceleração. Desta forma, a primeira derivada fornece a Equação (2.9)

$$\dot{y}_p(t) = \omega L_e \sin \omega t - \frac{1}{2} [L_b^2 - (desl + L_e \sin \omega t)^2]^{-1/2} [-2\omega L_e (desl + L_e \sin \omega t) \cos \omega t] \quad (2.9)$$

A partir da equação da velocidade, separando dois termos auxiliares u e v e utilizando as relações trigonométricas, obtém-se a aceleração do pistão (Equação. (2.15)), como segue:

$$u = [L_b^2 - (desl + L_e \sin \omega t)^2]^{-1/2} \quad (2.10)$$

$$\frac{du}{dt} = [L_b^2 - (desl + L_e \sin \omega t)^2]^{-3/2} [\omega L_e (desl + L_e \sin \omega t) \cos \omega t] \quad (2.11)$$

$$v = \omega L_e (desl + L_e \sin \omega t) \cos \omega t \quad (2.12)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 L_e desl \sin \omega t + \omega^2 L_e^2 (-\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \quad (2.13)$$

$$\cos 2\omega t = (-\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \quad (2.14)$$

$$\ddot{y}_p(t) = \omega^2 L_e \cos \omega t + \frac{\omega^2 L_e^2 \cos 2\omega t - \omega^2 L_e desl \sin \omega t}{[L_b^2 - (desl + L_e \sin \omega t)^2]^{1/2}} + \frac{\omega^2 L_e^2 (desl + L_e \sin \omega t)^2 \cos^2 \omega t}{[L_b^2 - (desl + L_e \sin \omega t)^2]^{3/2}} \quad (2.15)$$

A aceleração do pistão e a sua inércia irão compor um dos termos na equação de equilíbrio dinâmico, como será visto a seguir. Antes, porém, é necessário descrever outros esforços envolvidos entre as partes móveis, bem como estabelecer relações de equivalência, principalmente sobre a inércia da biela. É importante salientar que existem dois planos em relação aos quais serão escritas equações de equilíbrio de forças: plano de movimento da biela e plano do eixo do compressor (mancais superior e inferior).

2.3 Esforços no pistão, biela e excêntrico.

Com o auxílio da Figura 2.2b, podem-se definir as componentes da força que atuam no excêntrico. Esta força (F_b) é proveniente do balanço de forças no pistão na direção axial da biela, e as componentes são dadas por

$$F_{bx} = F_b \sin(w) \quad (2.16a)$$

$$F_{by} = F_b \cos(w) \quad (2.16b)$$

As forças dos contrapesos (para cada um) atuam no centro de gravidade (c.g.) e estão alinhadas com o excêntrico sendo determinadas por:

$$F_{cpx} = m_{cp} a_{cpx} = m_{cp} r_{cp} \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.17a)$$

$$F_{cpy} = m_{cp} a_{cpy} = m_{cp} r_{cp} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.17b)$$

A Figura 2.2b mostra que existem três contrapesos: um fundido juntamente com o eixo do compressor e outros dois rebitados sobre o anterior como ajuste fino no balanceamento do conjunto. Este balanceamento é obtido através de programas de simulação de vibrações na carcaça do compressor.

Outra importante componente é a força de inércia do excêntrico, considerando uma massa equivalente composta por sua massa física, além de uma fração da massa da biela. A massa da biela é distribuída entre as do pistão e do excêntrico (ver Figura 2.3), de acordo com as seguintes relações:

$$\begin{aligned} m'_p &= m_b \frac{L_1}{L_b} & m'_e &= m_b \frac{L_2}{L_b} \\ m_{pt} &= m_p + m'_p & m_{et} &= m_e + m'_e \end{aligned} \quad (2.18)$$

Com a massa equivalente (m_{et}) concentrada no c.g. do excêntrico, as componentes de sua força correspondente são dadas por:

$$F_{ex} = m_{et} a_{ex} = m_{et} L_e \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.19a)$$

e

$$F_{ey} = m_{et} a_{ey} = m_{et} L_e \omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.19b)$$

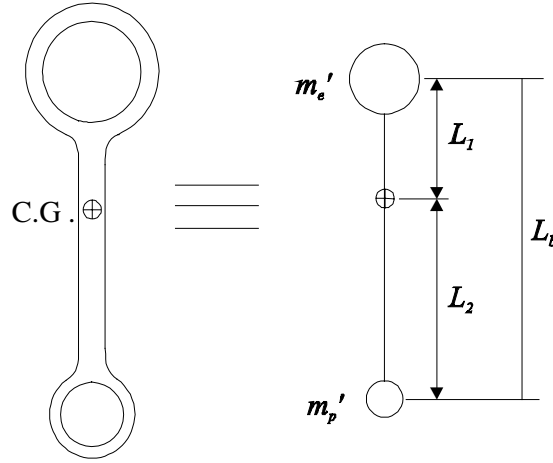


Figura 2. 3: Composição da massa adicional do pistão e biela.

O passo seguinte consiste em determinar a força transmitida pela biela (F_b) ao excêntrico, proveniente do balanço de forças na região do pistão. Tomando como base a Figura 2.4, considera-se que a força devido à pressão no pistão ($F_p = A_p P_p$) possa estar deslocada do eixo por uma distância d_l e que, na programação para obtenção dos sinais no tempo, poderá ser considerada diferente de zero nos instantes de abertura da válvula de descarga. Sendo assim, os somatórios de forças nas duas direções ficam

$$\Sigma F_x = 0 \therefore F_2 = F_b \sin(w) + F_1 \quad (2.20)$$

e

$$\Sigma F_y = 0 \therefore F_b \cos(w) - P_p A_p + m_{pt} \ddot{y}_p = 0 \quad (2.21)$$

onde

P_p – pressão na câmara de compressão.

A_p – área do pistão.

m_{pt} – massa do pistão (dada pela Equação (2.18)).

\ddot{y}_p – aceleração do pistão.

Na Equação (2.21) aparece o termo de inércia devido à aceleração do pistão. Os somatórios de momentos mostrados na Figura 2.4 resultam em:

$$\Sigma M_{\odot}$$

$$\Sigma M_0 = 0 \therefore -P_p A_p d_l + F_1 d_{F1} + F_2 d_{F2} = 0 \quad (2.22)$$

$$\Sigma M_1 = 0 \therefore P_p A_p \left(\frac{d_p}{2} - d_1 \right) + F_2 (d_{F1} + d_{F2}) - F_b \cos(w) \frac{d_p}{2} - F_b \sin(w) d_{F1} = 0 \quad (2.23)$$

$$\Sigma M_2 = 0 \therefore -P_p A_p \left(\frac{d_p}{2} + d_1 \right) + F_1 (d_{F1} + d_{F2}) + F_b \cos(w) \frac{d_p}{2} + F_b \sin(w) d_{F2} = 0 \quad (2.24)$$

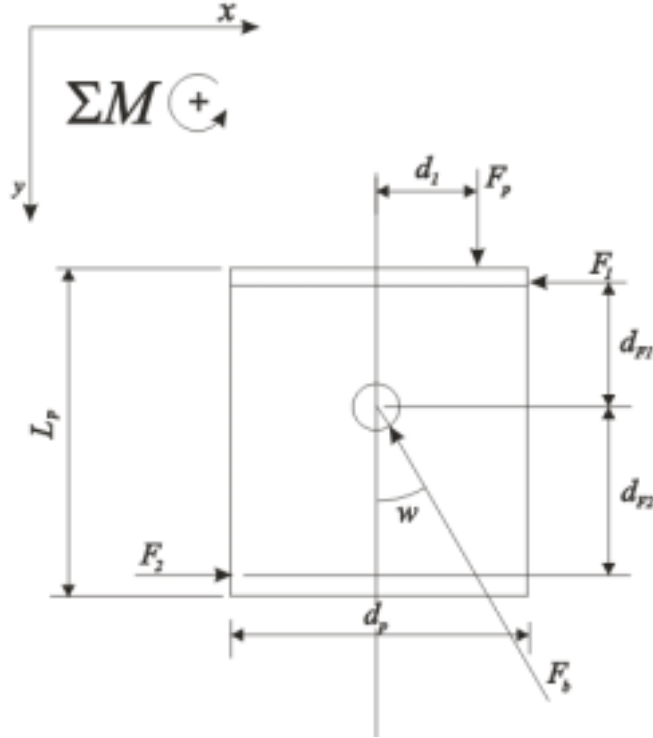


Figura 2. 4: Balanço de forças no pistão.

onde o ponto 0 é o ponto central de conexão biela/pistão, o ponto 1 o da reação F_1 (força lateral superior no pistão) e o ponto 2 é o da reação F_2 (força lateral inferior). Os termos d_{F1} e d_{F2} referem-se às distâncias na direção y entre o pino do pistão e as forças laterais. Aparecem força da biela, força de pressão e forças laterais.

2.4 Balanço de forças no eixo de acionamento

O próximo passo refere-se à determinação das reações nos dois mancais do eixo de acionamento, em duas direções. Para obtê-las, faz-se o balanço de cargas no eixo principal, excêntrico e contrapesos. Tomando como base a Figura 2.5, onde a reação F_{m1} seria a reação do mancal superior e F_{m2} a reação no mancal inferior e procedendo o somatório de forças e momentos, obtém-se:

$$\Sigma F_x = 0 \therefore F_{bx} + F_{cp1x} + F_{cp2x} - F_e - F_{m1x} + F_{m2x} = 0 \quad (2.25)$$

$\Sigma M \odot$

$$\Sigma M_1 = 0 \therefore F_b(d_{m1}) - F_e(d_{m1}) + F_{cp1}(d_{m1} - d_{cp1}) + F_{cp}(d_{m1} - d_{cp}) + F_{cp2}(d_{m1} - d_{cp2}) - F_{m2}(d_{m2}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\Sigma M_2 = 0 \therefore F_b(d_{m1} + d_{m2}) - F_e(d_{m1} + d_{m2}) + F_{cp1}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp1}) + F_{cp}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp}) + F_{cp2}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp2}) - F_{m1}(d_{m2}) = 0 \quad (2.27)$$

$$F_{m1} = \frac{F_b(d_{m1} + d_{m2}) - F_e(d_{m1} + d_{m2}) + F_{cp1}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp1}) + F_{cp}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp}) + F_{cp2}(d_{m1} + d_{m2} - d_{cp2})}{d_{m2}} \quad (2.28)$$

$$F_{m2} = \frac{F_b(d_{m1}) - F_e(d_{m1}) + F_{cp1}(d_{m1} - d_{cp1}) + F_{cp}(d_{m1} - d_{cp}) + F_{cp2}(d_{m1} - d_{cp2})}{d_{m2}} \quad (2.29)$$

O mesmo balanço pode ser feito para a direção y, onde se alteram as componentes de forças que, por comodidade, foram omitidas nas Equações (2.21) a (2.24).

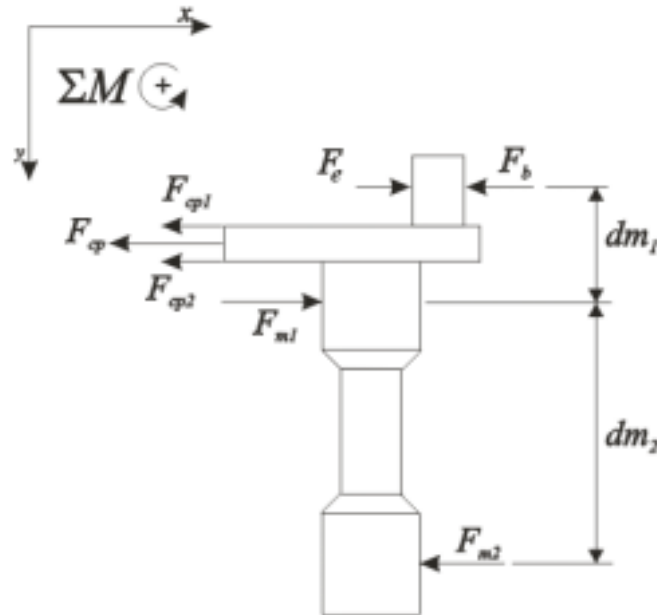


Figura 2. 5: Balanço de forças no eixo de acionamento do compressor.

2.5 Determinação das forças laterais no pistão

Estas reações foram obtidas de modo a simular o “Piston-Slap”, que se origina da rotação do pistão provocado pelas componentes transversais da força da biela e pelo deslocamento do perfil de pressão no interior do cilindro. Como todas as outras quantidades são obtidas por medida de projeto ou são calculadas diretamente do ciclo de funcionamento do compressor, necessita-se determinar estas forças transversais. A aceleração do pistão foi obtida a partir da Equação (2.15) por derivação cinemática. Para calcular a força na biela, basta substituir em (2.21), juntamente com a pressão instantânea, massa e área do pistão (variável de projeto para diferentes tipos de compressores). Optou-se por isolar F_1 em (2.24) e F_2 em (2.23) e somar as expressões

$$F_1 + F_2 = \frac{1}{(d_{F1} + d_{F2})} [2d_1 P_p A_p + (d_{F1} - d_{F2}) F_b \sin w] \quad (2.30)$$

Isolando F_1 , acima, e substituindo F_2 de (2.20), com pequena manipulação algébrica, obtém-se:

$$F_1 = \frac{1}{(d_{F1} + d_{F2})} [2P_p A_p d_1 + (d_{F1} - d_{F2}) F_b \sin w] - F_b \sin w - F_1 \quad (2.31)$$

$$F_1 = \frac{1}{2(d_{F1} + d_{F2})} [2P_p A_p d_1 + \{(d_{F1} - d_{F2}) + (-d_{F1} - d_{F2})\} F_b \sin w] \quad (2.32)$$

$$F_1 = \frac{1}{2(d_{F1} + d_{F2})} [2P_p A_p d_1 - 2d_{F2} F_b \sin w] \quad (2.33)$$

$$F_1 = \frac{1}{(d_{F1} + d_{F2})} [P_p A_p d_1 - d_{F2} F_b \sin w] \quad (2.34)$$

Da mesma forma, F_2 fica:

$$F_2 = \frac{1}{(d_{F1} + d_{F2})} [P_p A_p d_1 + d_{F1} F_b \sin w] \quad (2.35)$$

Note que, para o caso particular onde os pontos de reação (1 e 2) são simétricos em relação ao olhal do pistão ($d_{F2} = d_{F1}$), a soma das reações independe da força na biela (ver Equação (2.30)).

Uma vez determinadas todas as forças de excitação e reações, passou-se ao cálculo computacional das equações resultantes, com o objetivo de verificar como os esforços são distribuídos através das partes móveis e em quais pontos e direções possuem maiores amplitudes.

2.6 Esforços transmitidos

De posse das equações obtidas acima pode-se determinar as variações das forças ao longo do ciclo do compressor. A geração destas forças está diretamente relacionada ao perfil de pressão no interior do cilindro, que é a responsável direta e também importante fonte de excitação de vibração no bloco do compressor. Com a sincronização deste sinal ao movimento do pistão, pode-se estimar como as forças são transmitidas e como, no final, os mancais suportam esta excitação, em função do tempo e da frequência. Desta forma, por exemplo, um modelo de elementos finitos que represente o kit do compressor pode ser alimentado com estas informações e poderão ser feitas comparações de resultados numéricos com experimentais, ou seja, medições de vibrações em diversos pontos ou até mesmo resposta em frequência de um ponto com relação a outro (por exemplo, $H(f)$ do batente de molas com relação ao pé do bloco). Portanto, os estudos aqui desenvolvidos fazem parte de um amplo projeto de pesquisa de ruído e vibrações em compressores, no qual cada assunto abordado contribui para aprimorar o conhecimento do comportamento dinâmico-estrutural envolvido na compressão do gás refrigerante.

A seguir, serão apresentados alguns resultados obtidos das equações acima derivadas. Em primeiro lugar, apresenta-se a variação de pressão em um ciclo de compressão (compressor Embraco EGS 80). Juntamente com o sinal de pressão apresenta-se a força devida à pressão que é o resultado simples da sua multiplicação pela área do pistão.

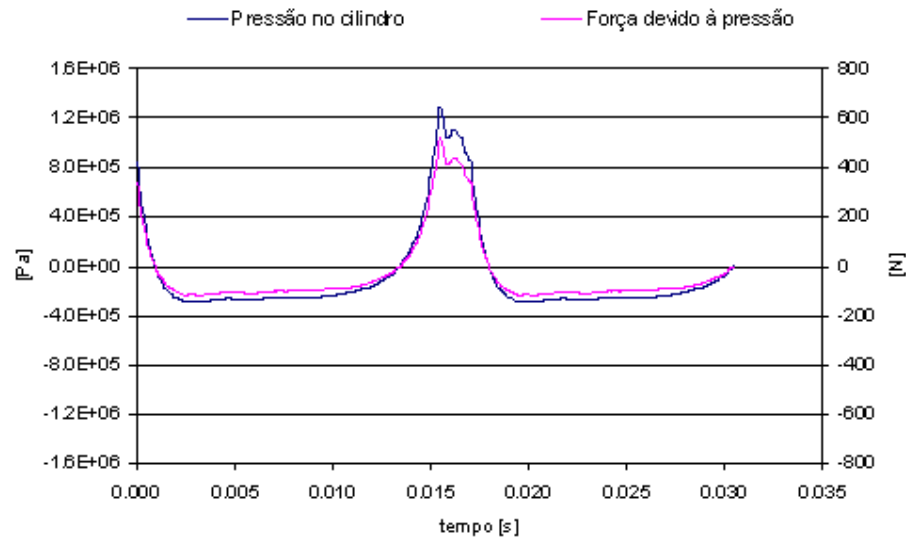


Figura 2. 6: Perfil de pressão no cilindro (azul) e força no topo do pistão (rosa).

A força de pressão tem o mesmo perfil do sinal de pressão, a menos de uma constante, que é a área do pistão, como pode ser visto na Figura 2.6.

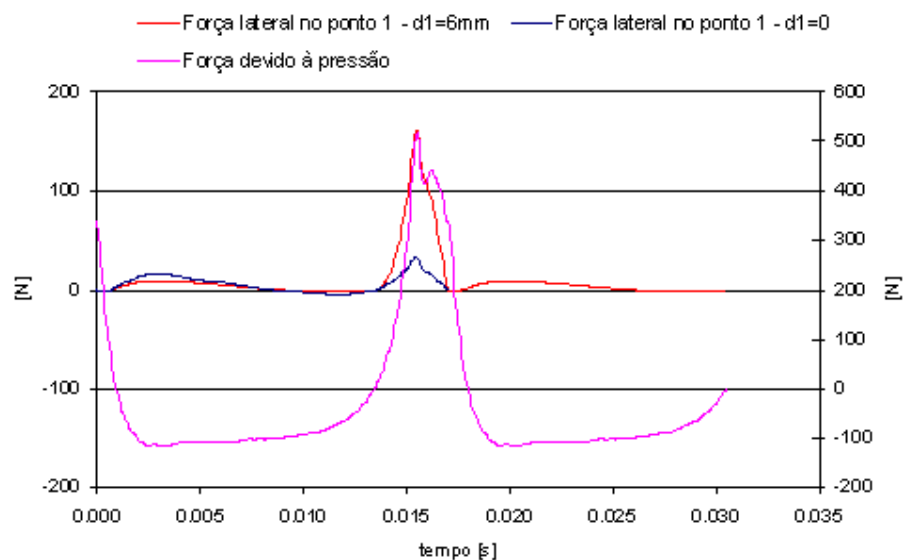


Figura 2. 7: Força à pressão no cilindro, força lateral no topo do cilindro deslocamento 6 mm senoidal (vermelha), força lateral no topo do cilindro e no centro (azul).

Uma verificação nas reações laterais do pistão com relação à força de pressão é vista na Figura 2.7. A escala destas forças está à esquerda no gráfico. Foram realizados dois cálculos para as forças laterais. O primeiro (curva azul), a força proveniente do gás está sendo aplicada no centro do pistão. O segundo (curva vermelha) prevê, que nestes instantes, a resultante da força no pistão é deslocada do centro. O valor de 6 mm foi escolhido por ser, aproximadamente, o ponto médio do raio do pistão. Observa-se uma diferença em torno de 110 Newtons, aproximadamente, nos picos de forças calculadas pelas duas abordagens citadas.

Pode-se notar, através da Figura 2.8, que as forças de pressão e na biela possuem perfis bastante próximos em todo o ciclo de compressão (8,5 a 17 milisegundos), diferindo um pouco durante a sucção.

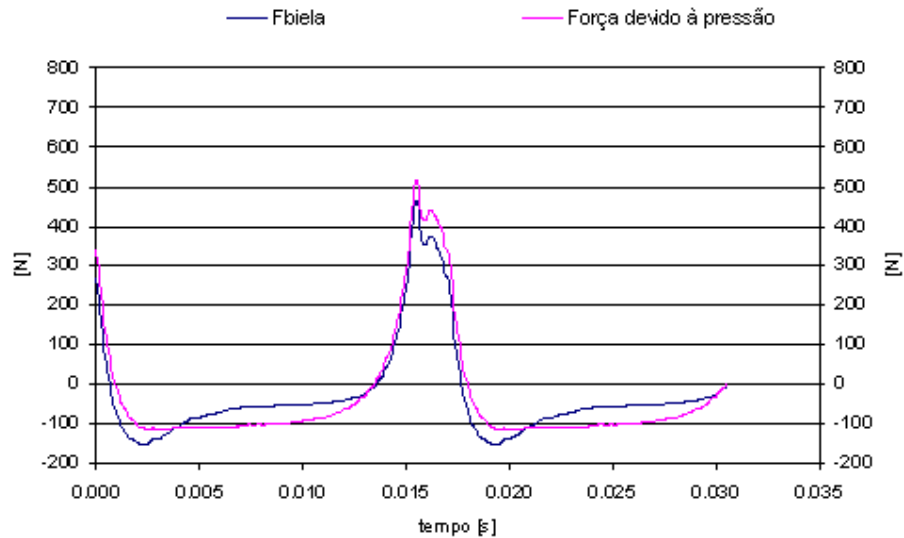


Figura 2. 8: Forças de pressão e força resultante na biela.

Nas Figuras 2.9 e 2.10 observam-se as reações nos mancais, cuja determinação é um dos objetivos deste capítulo. As forças na direção axial do pistão são maiores que na direção transversal, principalmente nos momentos de descarga, como era previsto, uma vez que são os instantes em que biela e excêntrico tendem a alinhar-se a 180° . Já no primeiro terço do ciclo (0 a 6 ms), dominam as forças transversais devido ao giro de contrapesos e própria inércia do conjunto móvel. As formas das curvas para os mancais superior e inferior apresentam pequena diferença.

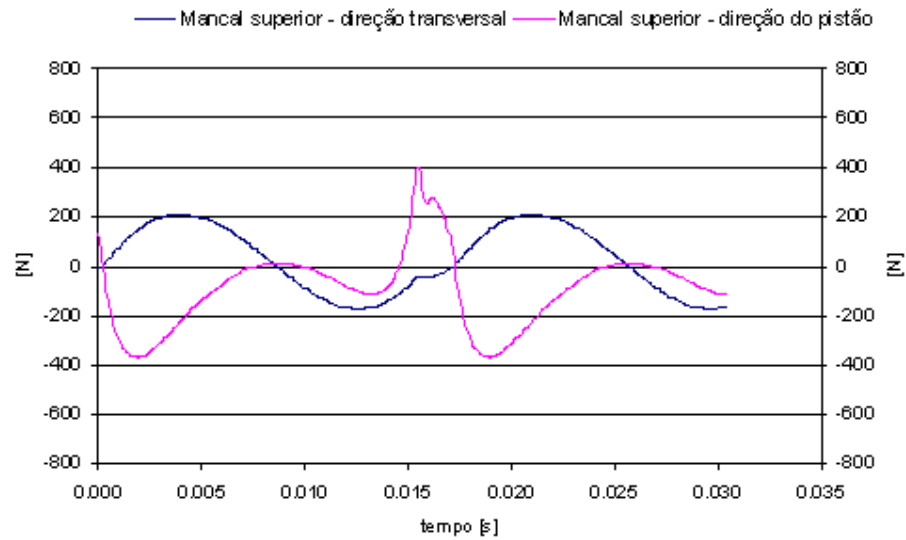


Figura 2. 9: Forças no mancal superior.

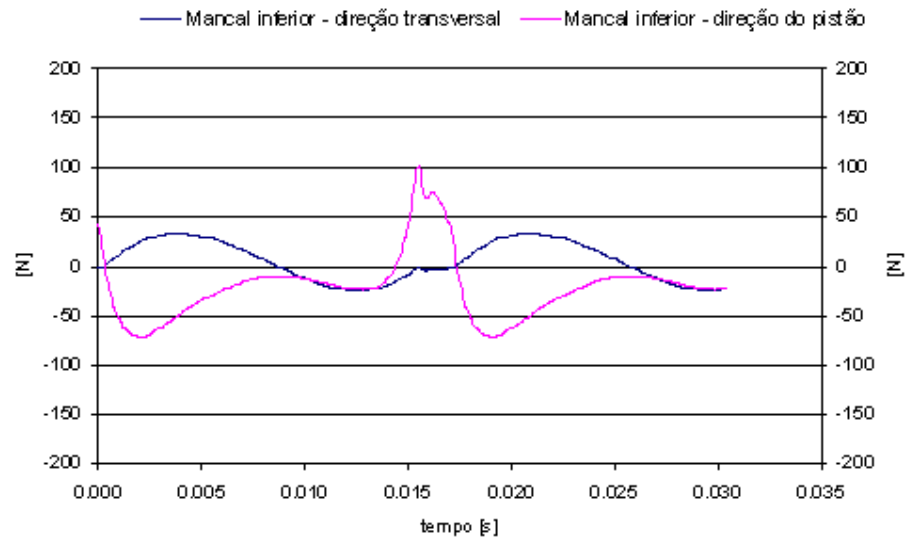


Figura 2. 10: Forças no mancal inferior.

Os resultados apresentados na Figura 2.11 mostram as forças de inércia dos contrapesos, pistão e excêntrico.

Enquanto os esforços de pressão e de reação nos mancais são da ordem de 400 N, próximo ao ponto morto superior, as forças de inércia individuais não chegam a 20% deste valor. Os maiores valores são do contrapeso fundido (massa maior) e do pistão (acelerações maiores).

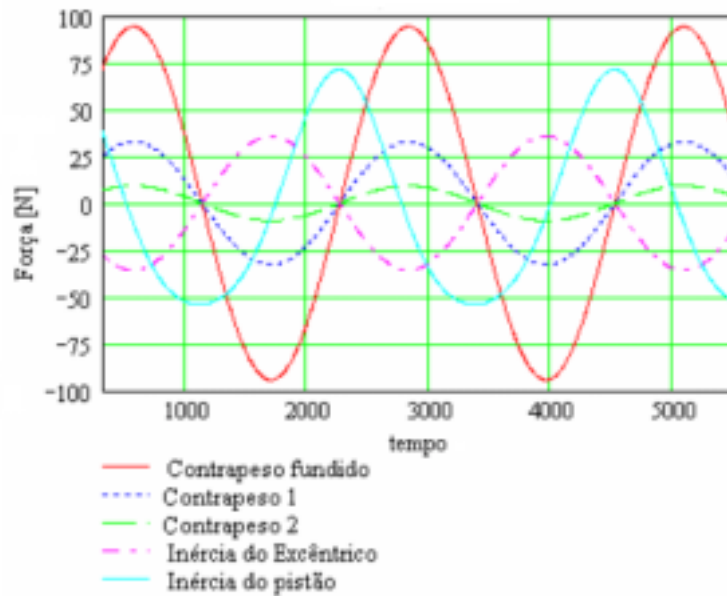


Figura 2. 11: Forças de contrapesos, inércia do pistão e excêntrico.

Para complementar, ilustram-se dois instantes em que podem ser calculadas e visualizadas as forças no mancal superior, nas duas direções ortogonais. O esquema da Figura 2.12, mostra um desenho das partes móveis à esquerda e um gráfico de aceleração e pressão no cilindro em função do tempo, tem-se:

VS – válvula de sucção.
descarga.

AVD – ponto de abertura da válvula de

VD – válvula de descarga.
sucção.

AVS – ponto de abertura da válvula de

A curva vertical indica o ponto em que foi tomado o posicionamento das partes móveis na curva em função do tempo.

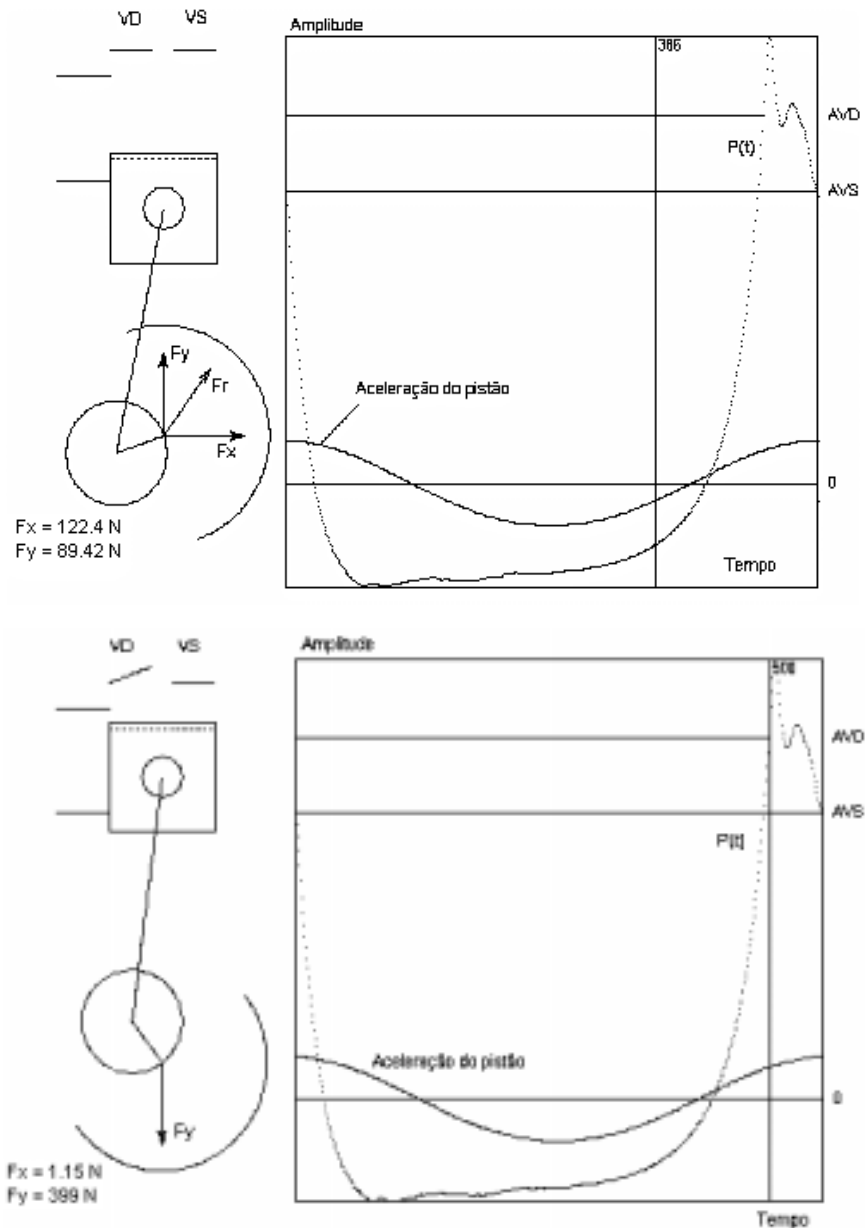


Figura 2. 12: Posições das partes móveis em sincronismo com o perfil de pressão e aceleração do pistão.

A partir deste ponto, com as curvas calculadas, têm-se dois caminhos a seguir para aplicação em modelos numéricos: análise transiente e/ou análise harmônica. Para a primeira, basta compor um número de ciclos adequados e aplicar aos pontos indicados na malha. Para a segunda opção, devem ser compostos vários ciclos destas forças com discretização adequada de modo a obter curvas, no domínio da frequência, com espaçamento e frequência de corte compatíveis com dados experimentais. A seguir, são apresentadas algumas curvas que mostram a distribuição espectral dos sinais de forças, como pode ser visto nas Figuras 2.13 e 2.14.

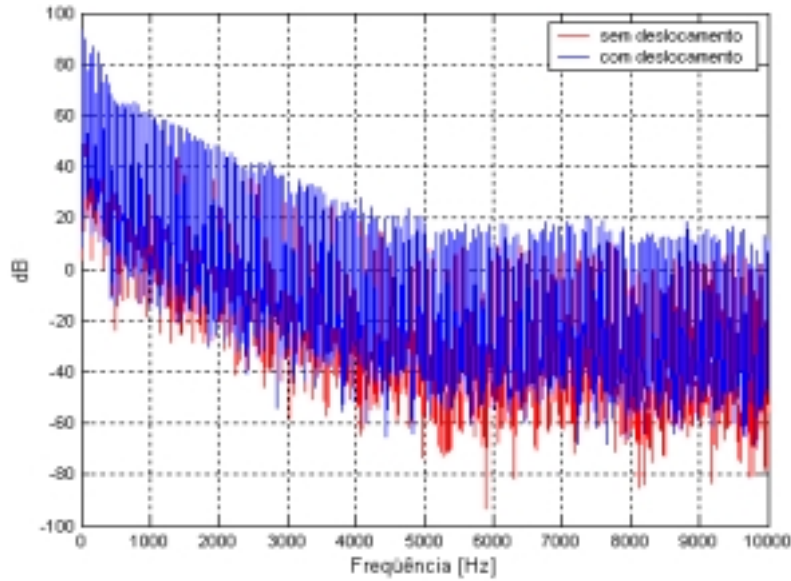


Figura 2. 13: Espectro de banda estreita dos sinais de força lateral com e sem deslocamento do centro do pistão quando a válvula de descarga está aberta.

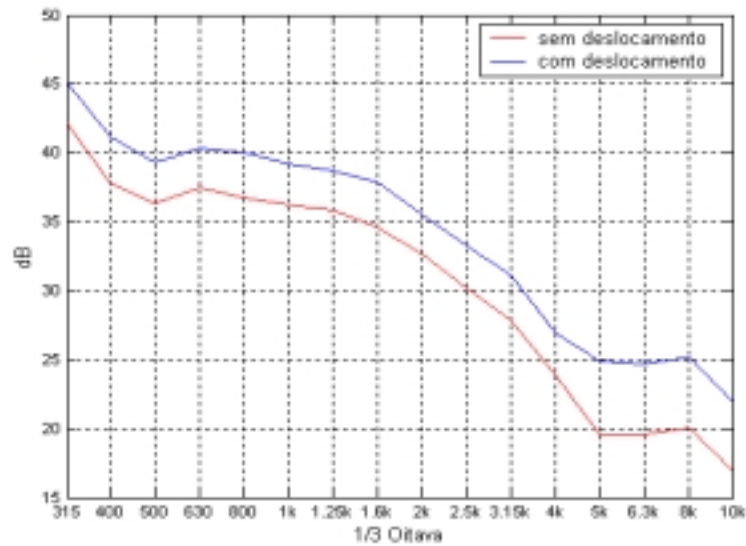


Figura 2. 14: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força lateral com e sem deslocamento do centro do pistão, quando a válvula de descarga está aberta.

É possível visualizar uma pequena alteração nas componentes de frequência, porém há uma diferença nos níveis em todo o espectro, alterando as amplitudes das respostas de acordo com a utilização de uma ou outra curva como excitação da parede do cilindro, no modelo numérico.

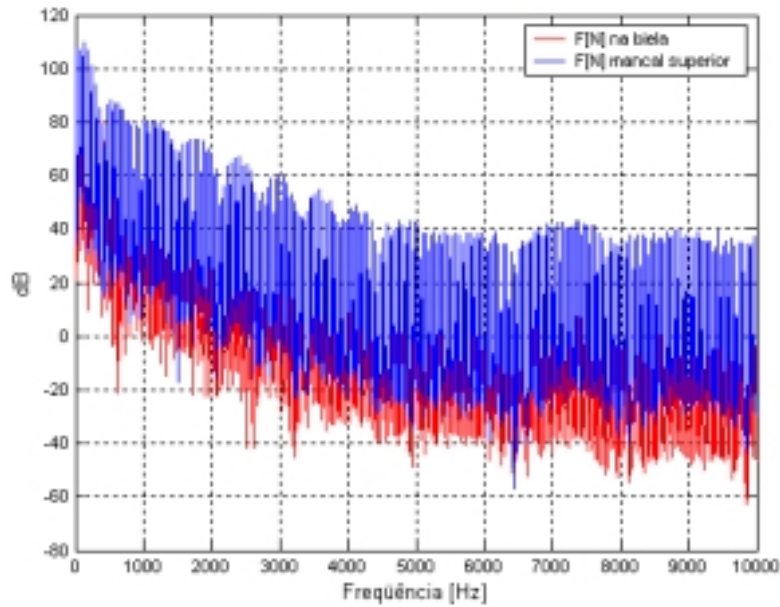


Figura 2.15: Espectros em banda estreita dos sinais de força na biela e força no mancal na direção do pistão.

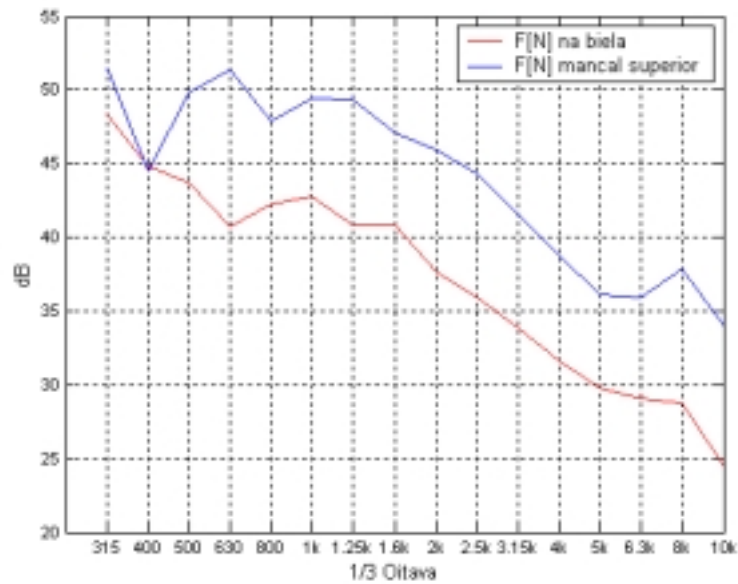


Figura 2.16: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força na biela e força no mancal na direção do pistão.

Os espectros das forças da biela e mancal (Figuras 2.15 e 2.16) mostram divergências mais acentuadas, tanto em baixas quanto em altas frequências. Além disso, os níveis são 10

dB superiores em relação às forças laterais do cilindro, podendo ser tomadas como esforços dominantes no processo de compressão do gás.

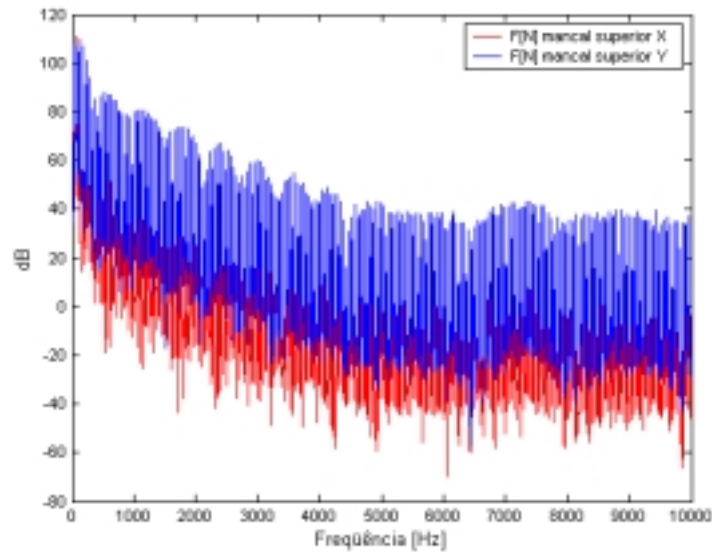


Figura 2.17: Espectros em banda estreita dos sinais de força no mancal na direção transversal e na direção do pistão.

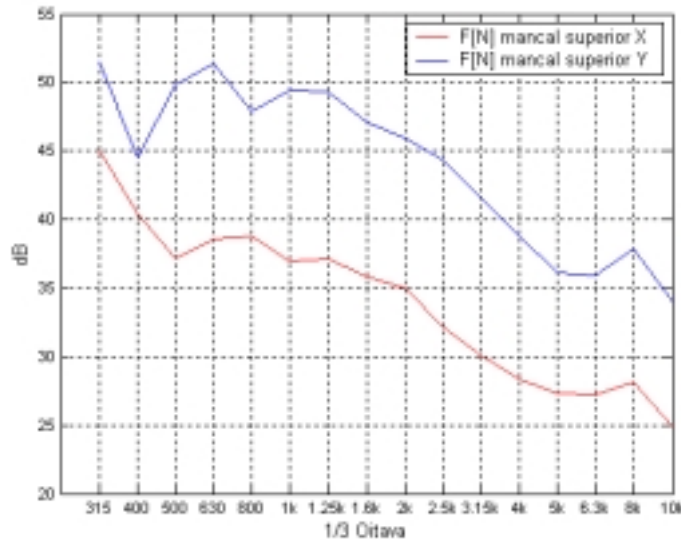


Figura 2.18: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força no mancal na direção transversal e na direção do pistão.

Nas Figuras 2.17 e 2.18 é apresentada a diferença entre as forças na direção axial do pistão e na direção transversal, mostrando que a excitação se dá principalmente no momento

de máxima pressão no cilindro. As Figuras 2.19 e 2.20 mostram que o mancal superior é o mais solicitado, pois está quase alinhado com a biela e pistão.

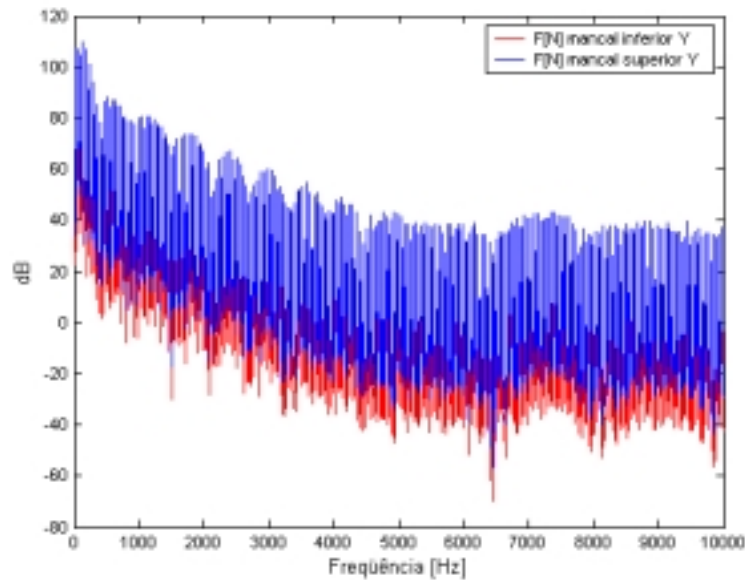


Figura 2. 19: Espectros em banda estreita dos sinais de força no mancal superior e inferior, na direção do pistão.

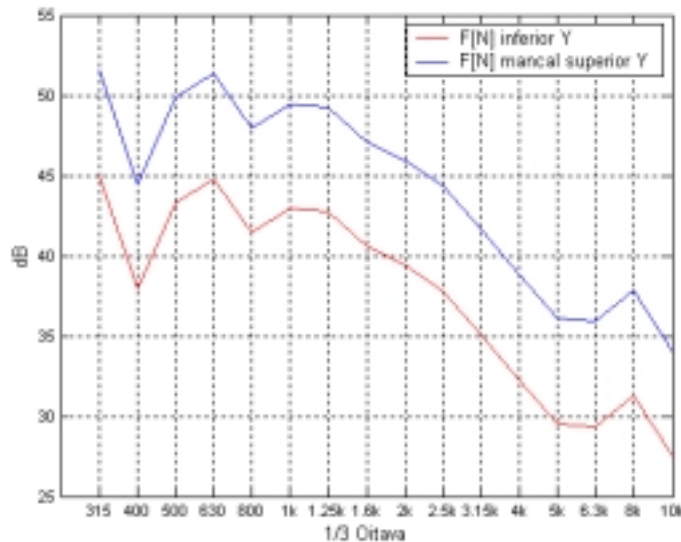


Figura 2. 20: Espectros em banda de 1/3 oitava dos sinais de força no mancal superior e inferior, na direção do pistão.

Neste Capítulo foram apresentadas informações qualitativas e quantitativas dos esforços envolvidos no sistema de compressão de gás. As expectativas da importância do mancal superior na direção do pistão foram colocadas, prevendo que quando os termos de rigidez dos filmes de óleo forem incluídos as maiores modificações do sinal de forças ocorrerão nesta direção.

Capítulo 3 Rigidez e amortecimento do mancal tipo filme de óleo

3.1 Introdução

Na identificação das características de vibração e ruído de máquinas rotativas o conjunto do mancal é um dos elementos mais importantes devido à transmissibilidade de cargas dinâmicas para o restante da estrutura da máquina.

Dessa forma, a identificação das características dinâmicas dos mancais, tais como rigidez e amortecimento, é importante no estudo e caracterização de fontes de ruídos e vibrações nessas máquinas.

O mancal radial é um elemento de máquina que tem como função sustentar um eixo girante sob carregamento radial. Um furo é inserido em uma peça na qual se deseja sustentar o eixo. Nesse furo monta-se o eixo com uma determinada folga que permite sua livre rotação. A folga, de dimensão muito inferior ao diâmetro do eixo, é alimentada continuamente por um fluido lubrificante. A presença do fluido cumpre a principal função do mancal que é impedir que as superfícies do eixo e do furo entrem em contato direto, aumentando a durabilidade dos componentes e diminuindo substancialmente o consumo de energia por atrito e o nível de ruído.

O funcionamento de um mancal baseado nos efeitos da lubrificação hidrodinâmica está associado a dois efeitos que compõem a capacidade do óleo suportar carga: efeito espremido e efeito cunha. O primeiro refere-se à condição em que duas superfícies sólidas, separadas por um filme de óleo, são forçadas a se aproximar (ver Figura 3.1a). Como o óleo

não se move junto às superfícies, na medida em que este escoar para as laterais, as camadas desse fluido sofrem movimento cisalhante e sua viscosidade se opõe ao movimento. Esse fato resulta na elevação da pressão no filme de óleo que será responsável pela sustentação das cargas que forçam a aproximação das superfícies. O segundo efeito citado, acontece quando duas superfícies não perfeitamente paralelas e separadas por um filme de óleo possuem movimento tangencial relativo, como na Figura 3.1b. O óleo é carregado pelas superfícies em direção a uma cunha. Devido à diminuição da secção transversal, surge uma oposição ao escoamento de óleo pela cunha, elevando a pressão e causando o efeito de sustentação de carga.

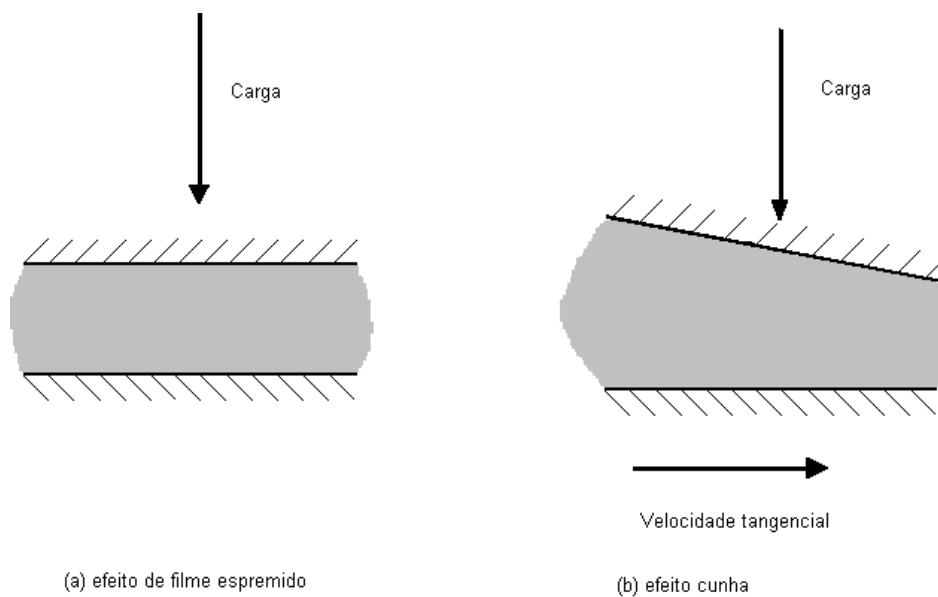


Figura 3. 1: Efeitos de filme de óleo espremido e cunha.

3.2 Revisão bibliográfica

A dinâmica e a estabilidade dos mancais radiais foi iniciada em 1925, com Stodola. Este considerou o mancal como sendo um elemento flexível, cujas características de rigidez e amortecimento influenciam no comportamento dinâmico do rotor [3].

Em outro trabalho, Newkirk e Taylor [4], analisaram a sensibilidade induzida pelo mancal, encontrando vibrações do eixo que não podiam ser atribuídas ao desbalanceamento do mesmo, bem como ao atrito interno. Newkirk descobriu que estas instabilidades estavam diretamente associadas às características do filme de óleo.

Armentrout e Wilson [5], através de um estudo de caso de um compressor de único estágio de fluxo axial-radial, comum em indústrias petroquímicas, mostraram que turbomáquinas trabalhando em regime super-ressonante podem, através da redução da rigidez dos eixos, reduzir as cargas dinâmicas e vibrações transferidas aos mancais e, conseqüentemente, para o resto da carcaça da máquina. Os autores explicam que a tendência de projetar eixos de maiores diâmetros para maximizar o deslocamento do mancal e assim conseguir um bom amortecimento, um benefício para velocidades próximas da crítica, região onde o deslocamento é controlado pelo amortecimento, é prejudicial para outras velocidades. Para velocidades acima da crítica, para as quais o movimento do rotor não é mais ressonante, um eixo muito rígido é prejudicial pois transfere movimento orbital para os mancais, causando altas cargas nestes e transmitindo vibrações para todo o sistema.

Um método simples de cálculo do fator de amortecimento através dos Diagramas de Bodé e Polar da resposta do eixo de conjunto rotor-mancal hidrodinâmica foi apresentado por Inan ul Hag [6]. O sistema foi considerado linear, ou seja, força elástica proporcional ao deslocamento e força resistente de amortecimento proporcional à velocidade, e isotrópico, isto é, mesma rigidez e amortecimento em todas direções. O modelo de amortecimento considerado foi o viscoso, e a força resistente proporcional à velocidade. Somente vibrações laterais relacionadas ao primeiro modo, excitado pela força de desbalanceamento foram consideradas. Resultados apresentados para três configurações de mancais com 1, 2 e 3 rotores lubrificados a ar e óleo, indicaram fatores de amortecimento variando entre 0,0349 e 0,0386.

Uma análise de mancais radiais de múltiplo passo de comprimento finito, através do método de elementos finitos semi-análítico, foi desenvolvida por Hashimoto [7]. A dificuldade do método quanto ao elevado número de elementos, para uma boa precisão de resultados, foi contornada através da divisão do campo de pressão na direção circunferencial. Comparações de distribuição de pressão, capacidade de carga e número de Sommerfeld com resultados experimentais apresentaram boa concordância para três geometrias deste mancal, sob regime laminar. O número de Sommerfeld é um número adimensional, relacionado ao estabelecimento das condições de contorno, que facilita a obtenção da solução analítica da equação de Reynolds para o caso unidimensional.

Uma análise de um sistema de mancais radiais de um compressor rotativo (Figura 3.2) para ar condicionado, levando-se em conta as altas cargas dinâmicas, comuns em máquinas rotativas, e tratando o sistema de mancais como não-linear, foi realizada por Hattori [8]. Foi considerado um problema acoplado de equações de movimento para os rotores combinado com as Equações de Reynolds para todos os mancais. Através dos deslocamentos e

velocidades do centro do rotor, os coeficientes de rigidez e amortecimento foram calculados numericamente e mostrados para uma revolução do rotor. As forças externas consideradas foram as duas massas excêntricas (pistões rotativos) que comprimem o gás e as forças do gás (sucção-compressão). Foram apresentados resultados de deslocamentos, velocidades e acelerações do centro do rotor, forças de reação e coeficientes de amortecimento e rigidez para cada mancal para uma revolução.

Os coeficientes apresentaram variações superiores a uma ordem de magnitude ao longo da rotação. Em alguns casos os coeficientes mudaram de positivo para negativo ao longo da rotação (ver Tabela 3.1).

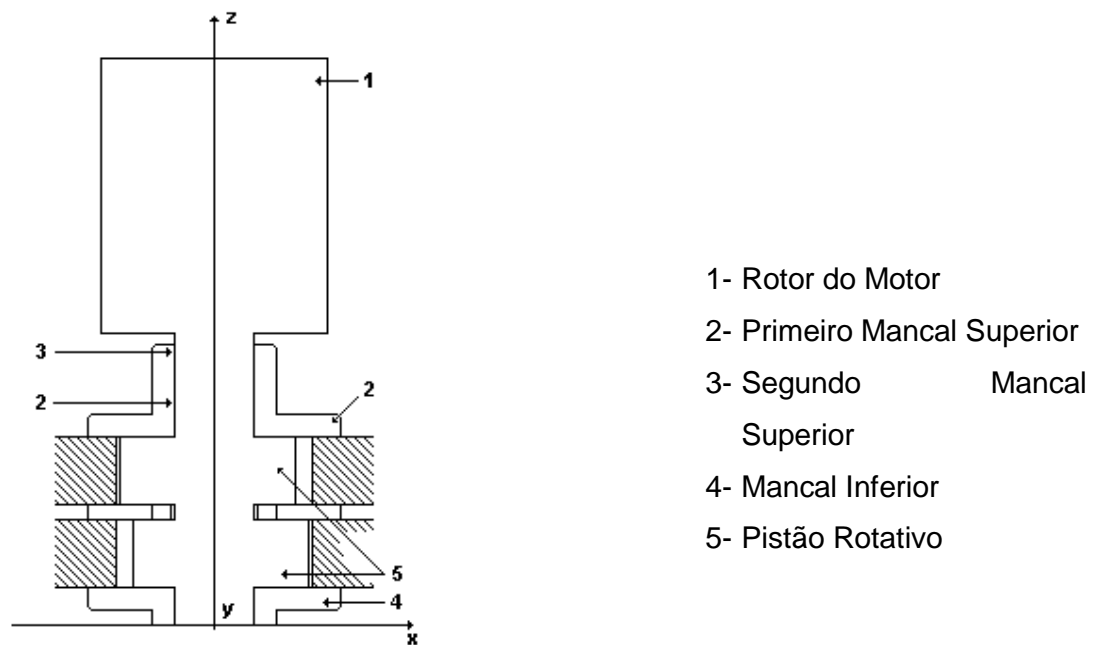


Figura 3. 2: Configuração do compressor rotativo com duas unidades de compressão.

Tabela 3. 1: Coeficientes de rigidez e de amortecimento em filmes de óleo (valores médio, máximo e

		Mancal 1		Mancal 2		Mancal 3	
		Médio	Máx/Mín	Médio	Máx/Mín	Médio	Máx/Mín
K_{xx}	$\times 10^8$ N / m	-2,099	-0,492 -5,205	-0,696	-0,042 -1,427	-0,823	0,149 -2,405
K_{xy}		-0,130	0,860 -2,377	-0,137	0,239 -0,791	-0,595	0,306 -2,997
K_{yx}		2,187	4,727 0,754	0,843	1,678 0,092	0,809	2,333 0,006
K_{yy}		-1,242	0,404 -3,750	-0,563	0,070 -1,662	-0,560	0,378 -1,653
C_{xy}	$\times 10^5$ N s / m	-2,664	-0,360 -8,899	-0,943	-0,107 -2,653	-1,725	-0,141 -6,279
C_{yx}		1,707	4,294 0,339	0,537	1,311 -0,022	0,326	1,808 -1,301
C_{yy}		-2,253	-0,948 -4,613	-1,138	-0,238 -2,046	-1,253	-0,143 -2,746

mínimo).

Os resultados mostraram que as não-linearidades do filme de óleo influenciam de forma muito significativa o movimento do rotor e que uma linearização do sistema não é suficiente para alcançar resultados aceitáveis. De acordo com Hattori o método usual de cálculo das equações para a carga dinâmica através da expansão em Séries de Taylor em torno da posição de equilíbrio estático não é suficiente para grandes cargas dinâmicas, pois a amplitude dinâmica de movimento do centro do rotor não pode ser ignorada.

O trabalho de Campbell [9] fez uma revisão dos métodos destinados a prever o comportamento de mancais radiais sob carregamentos de máquinas alternativas. Experimentos em uma máquina que simula o carregamento do motor diesel sobre os mancais das bielas foram realizados na Glacier Metal Co. Ltda.

Lund [10] apresentou um método numérico para cálculo de rigidez e amortecimento para mancais hidrodinâmicos. A Equação de Reynolds foi resolvida pelo método das diferenças finitas para distribuição de pressão estacionária e não-estacionária. Para expressar a

parte dinâmica da força de reação, Lund utilizou uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno da porção de equilíbrio estático. Dados referentes aos quatro coeficientes de rigidez e amortecimento são fornecidos ao longo da rotação para mancais de duas ranhuras axiais, mancais elípticos, de três lóbulos e mancal com deslocamento cilíndrico.

Uma simulação numérica de mancais radiais finitos sujeitos a carregamentos dinâmicos e estáticos para escoamento turbulento e laminar foi apresentada por Manke [11]. O método numérico utilizado para a integração da Equação de Reynolds foi o de volumes finitos, usando uma malha não ortogonal adaptada à fronteira do filme de óleo. A fronteira de cavitação é determinada através do uso das condições de contorno de Reynolds em conjunto com a condição de continuidade do escoamento. O carregamento dinâmico é estudado tanto para cargas constantes como variáveis em magnitude e direção. É analisada a influência da massa do eixo no comportamento dinâmico do mancal, e sua importância na determinação da órbita descrita pelo eixo. Para o cálculo da trajetória do eixo várias metodologias numéricas para a solução do sistema de equações foram apresentadas. A presença de cavitação também foi considerada. Comparações do número de Sommerfeld, da trajetória do eixo e da vazão lateral com resultados da literatura foram bastante compatíveis. Estudos da sensibilidade da malha utilizada também foram apresentados.

Alguns métodos experimentais de obtenção dos coeficientes de rigidez e amortecimento de mancais hidrodinâmicos são apresentados por Goodwin [12]. Um resumo destes métodos está apresentado abaixo:

MÉTODO DA FORÇA ESTÁTICA

Incrementos de cargas estáticas em ambas direções são aplicados separadamente no eixo e, através da medição dos deslocamentos do eixo em relação ao mancal nas duas direções em cada fase de aplicação das forças, desta forma os quatro coeficientes de rigidez podem ser medidos. Destaca-se que o método presume que os coeficientes de rigidez estáticos são os mesmos que os coeficientes de rigidez dinâmica.

MÉTODO DA RECEPTÂNCIA COMPLEXA

Este método envolve a aplicação de uma força harmônica ao eixo nas direções vertical e horizontal separadamente, e a medição dos deslocamentos e velocidades nas duas direções em cada fase de aplicação das forças. Através das amplitudes e fases da força aplicada ao eixo, deslocamentos e velocidades deste, os quatro coeficientes de rigidez e de amortecimento são calculados.

MÉTODO DA MULTIFREQUÊNCIA

Este método envolve a excitação do eixo em todos os modos dentro de um intervalo de frequências prescrito, simultaneamente nas duas direções, x e y . O objetivo final é a obtenção mais acurada dos coeficientes, assumidos independentes da frequência. A única diferença deste método para o anterior é a excitação simultânea, mas os oito coeficientes são calculados através da mesma metodologia.

MÉTODO DE FORÇAS CENTRÍFUGAS

São os métodos mais simples, onde através de massas de desbalanceamento de magnitude conhecida, que são acopladas ao eixo em rotação, o mancal é excitado harmonicamente. Através da resposta do eixo, os coeficientes são calculados. Salienta-se que são métodos de trabalho no domínio do tempo.

MÉTODO TRANSIENTE

A diferença destes métodos em relação aos métodos derivados da receptância complexa é que aqui não se usa excitação do eixo de forma contínua, usam-se sinais transientes na excitação do eixo para a medição das receptâncias, assim sua vantagem é a investigação de várias frequências simultaneamente. Um exemplo destes métodos é a excitação transiente do eixo provocada por um martelo de impacto, através de uma força impulsiva. Com as medições de deslocamento do eixo juntamente com a força de excitação os coeficientes de rigidez e amortecimento podem ser calculados.

Ressalta-se que mancais hidrodinâmicos excitados dinamicamente, como já citados anteriormente em alguns trabalhos, têm características altamente não lineares, desta forma as respostas do eixo a excitação é fortemente dependente da amplitude da perturbação.

Burrows [13] fez uma comparação entre as técnicas de medição de coeficientes dinâmicos de filme espremido usando seqüências binárias pseudo-aleatórias (prbs) e sinais harmônicos Schroeder-phased (sphs) para a excitação do eixo para uso em testes multifrequências.

Seqüências binárias são sinais determinísticos que se repetem em intervalos periódicos, assim denominados devidos à aproximação da sua função auto-correlação com a auto-correlação de um ruído perfeitamente branco. Estas seqüências são usadas no lugar de ruído

branco e sinais impulsivos, devido à grande probabilidade de saturação do sinal gerado e anulabilidade da hipótese de linearidade do sistema.

Os coeficientes de rigidez do filme de óleo foram desprezados e a dinâmica do filme espremido foi resumida pelos 4 coeficientes de amortecimento.

Uma bancada experimental esquematizada como na Figura 3.3, descrita abaixo, foi construída para a comparação das técnicas [13]. Um eixo rígido com massa de 8,12 kg é suportado nos extremos por mancais de rolamentos, cada qual equipado com reguladores de posição do eixo para variação da excentricidade. O mancal testado, situado no meio do vão, foi munido de 4 sensores de proximidade para a medição do deslocamento e duas hastes (horizontal e vertical) para a conexão do excitador eletrodinâmico com a célula de carga.

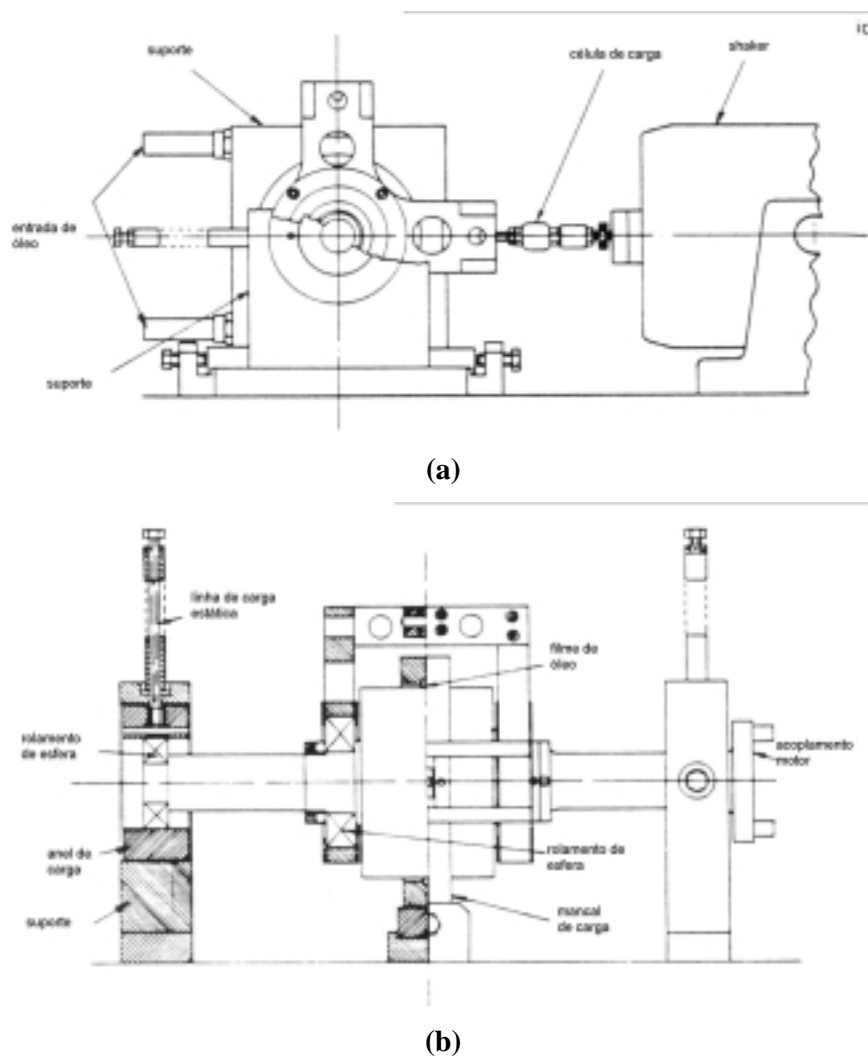


Figura 3. 3: Detalhes do mancal realizado experimento Burrows *et al* [13].

A comparação dos coeficientes de amortecimento linearizados, para 5 valores de excentricidade do eixo, foram calculados através das FRF, apresentaram para altas

excentricidades elevadas discrepâncias entre as duas técnicas. Os espectros dos sinais medidos de deslocamento em ambos os eixos, horizontal e vertical, são também apresentados para ambas as técnicas e uma boa concordância nos resultados foi conseguida.

Em outro trabalho, Burrows [14] apresentou um algoritmo simples para cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento considerando o eixo rígido. O algoritmo é primeiramente testado em um sistema simulado, em que o modelo é livre de incertezas e de ruído de medição. O efeito de contaminação do sinal é também testado através da adição de ruído aos sinais. O algoritmo no domínio da frequência apresentou-se bem menos sensível ao ruído que algoritmos no domínio do tempo, apresentados na literatura. Posteriormente o algoritmo foi testado com dados experimentais e novamente o procedimento no domínio da frequência mostrou-se melhor, exibindo muito menos discrepâncias em relação aos dados experimentais do que os procedimentos no domínio do tempo usados anteriormente.

Apesar da existência de vários métodos, citados anteriormente, para a obtenção experimental dos coeficientes de rigidez e amortecimento, foram encontrados na literatura poucos trabalhos dedicados a estes procedimentos mostrando os perfis desses coeficientes.

Um trabalho de grande importância para o presente estudo foi o desenvolvido por Wisbeck [15], onde é apresentada uma nova metodologia de solução de mancais radiais acoplados a um eixo passível de inclinação sob carregamento dinâmico. Isso compreende uma nova forma de compor as equações governantes e também uma nova maneira de resolvê-las. As equações escritas, respeitando-se um sistema cartesiano fixo, embora contrastando com a maioria dos atuais métodos empregados, torna o processo de dedução de equações mais claro e objetivo. A solução das equações foi realizada por método direto, devido à robustez numérica dos algoritmos disponíveis, segundo o autor. A principal vantagem desta nova formulação é a possibilidade de se resolver vários mancais acoplados, sem grandes dificuldades adicionais de implementação em relação à solução de um único mancal finito. O trabalho apresentou uma metodologia para a solução de dois mancais acoplados, podendo ser facilmente adaptada para a solução de vários mancais. Nesse trabalho são incluídos efeitos de atrito e desgaste, embora sejam fenômenos de grande complexidade. Através da utilização de modelos simples, buscando-se obter resultados mais realistas considerando estes efeitos.

A solução consiste em resolver as equações dinâmicas juntamente com a equação de Reynolds, a qual foi solucionada pelo método dos volumes finitos, como realizado em outros trabalhos já citados anteriormente. A equação de Reynolds é deduzida a partir das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, chegando-se a:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial Y} \right) = 6\mu \left[(U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial X} + (V_2 - V_1) \frac{\partial h}{\partial Y} + 2(\varpi_h - \varpi_0) \right] \quad (3.1)$$

O equacionamento é realizado supondo que o fluido em estudo é newtoniano, a massa específica ρ e a viscosidade μ são constantes, o efeito inercial do fluido é desprezado e todo tipo de força de campo também. No equacionamento, h representa a espessura do filme de óleo, p a pressão, U , V e ϖ , representam velocidades, sendo U para coordenada X , V para coordenada Y e ϖ para Z , onde o subíndice 2 é para $Z=0$ e 1 para $Z=h$. Outro ponto importante é que as coordenadas X e Y não devem ser confundidas com as coordenadas x e y adotadas neste trabalho. Associa-se X com a direção circunferencial θ e Y com a direção axial z .

A teoria empregada por Wisbeck [15] foi à base dos dados de entrada para resolução do sistema proposto pela dissertação.

3.3 Rigidez e amortecimento do mancal

Inicialmente a Figura 3.4 mostra o modelo do eixo juntamente com os demais componentes que serão estudados. Algumas características físicas do modelo estão listadas abaixo:

Folga no mancal superior	15 μm ;
Folga no mancal inferior	15 μm ;
Massa eixo-rotor	1,2664 kg,
Refrigerante	R134a
Viscosidade do óleo	$3,76 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{s}$

Cabe ressaltar que é preciso disponibilizar as características dos demais componentes, além do eixo, pois a resolução das equações dinâmicas, juntamente com a equação de Reynolds, determina a trajetória do eixo. Na Figura 3.5 é mostrada esta trajetória, também conhecida como órbita, representada em coordenadas adimensionais e fazendo referência em azul ao mancal superior e em vermelho ao mancal inferior.

Este estudo é caracterizado para um fluido newtoniano. Um ponto que poderia trazer alguma controvérsia seria considerar a não variação da temperatura no mancal e,

conseqüentemente, assumir a viscosidade como constante, já que a variação de temperatura afeta sensivelmente a viscosidade do óleo. Mas esta é uma hipótese bem aceita na solução de mancais e adotada em trabalhos anteriores.

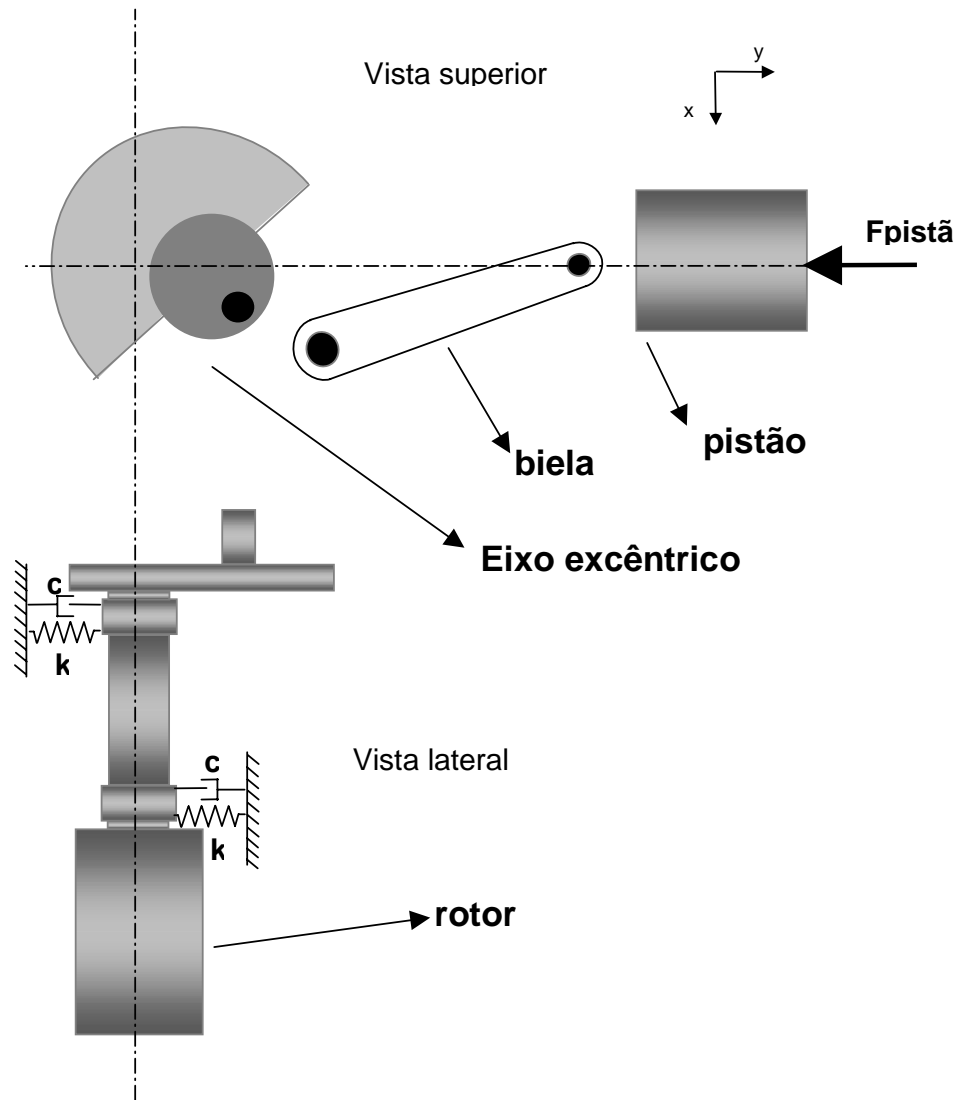


Figura 3. 4: Geometria dos mancais.

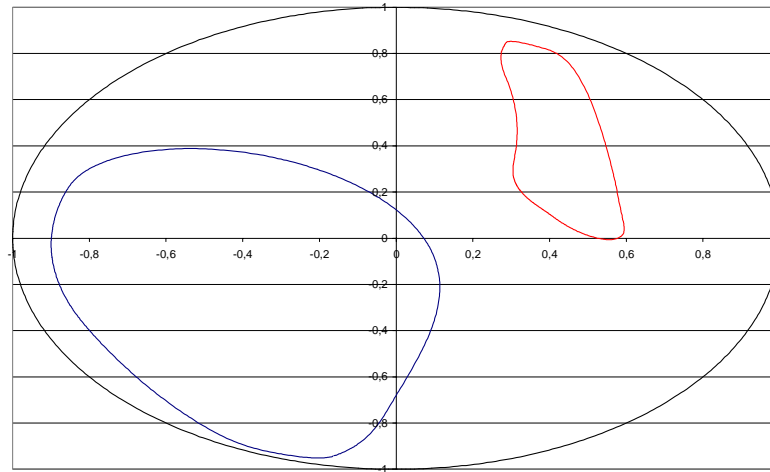


Figura 3. 5: Órbitas dos mancais adimensional, em azul mancal superior e vermelho mancal inferior.

A determinação dos coeficientes de rigidez e de amortecimento é feita ponto a ponto, para um ciclo ou uma rotação do eixo. Neste estudo foram fixados 557 pontos em 360° . A órbita é calculada com um pequeno incremento de força no mancal e verifica-se a nova posição e características assumidas. Assim tem-se a rigidez com orientação x no mancal superior, representada pela derivada da força na direção x em relação à variável x. A rigidez com orientação xy é representada pela derivada da força na direção x em relação à variável y e, da mesma forma para os demais valores, como nas equações abaixo:

$$k_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \cong \frac{\Delta F_x}{\Delta x} \quad (3.2)$$

$$k_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y} \cong \frac{\Delta F_y}{\Delta y} \quad (3.3)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \cong \frac{\Delta F_x}{\Delta y} \quad (3.4)$$

$$k_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \cong \frac{\Delta F_y}{\Delta x} \quad (3.5)$$

O mesmo ocorrendo com relação ao amortecimento:

$$c_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \cong \frac{\Delta F_x}{\Delta \dot{x}} \quad (3.6)$$

$$c_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \cong \frac{\Delta F_y}{\Delta \dot{y}} \quad (3.7)$$

$$c_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \cong \frac{\Delta F_x}{\Delta \dot{y}} \quad (3.8)$$

$$c_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \equiv \frac{\Delta F_y}{\Delta \dot{x}} \quad (3.9)$$

Nas Figuras 3.6 a 3.9 são mostradas as variações de rigidez e amortecimento, tanto para o mancal superior quanto para o mancal inferior. A referência fixa (xy) é a mesma da Figura 3.4. Todos os cálculos são para regime permanente e são apresentados por volta de 1 ½ ciclos, para se observar a continuidade dos valores apresentados. As curvas apresentadas são para valores discretos (557 pontos por ciclo), sendo a velocidade de rotação do eixo de 3520 rpm ($\cong 60$ Hz).

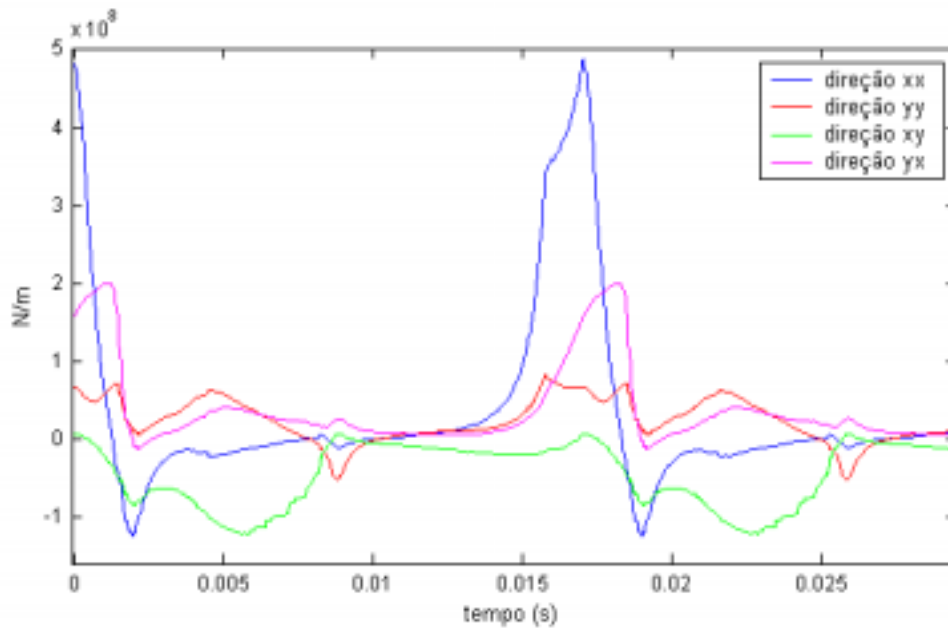


Figura 3. 6: Rigidez para o mancal superior.

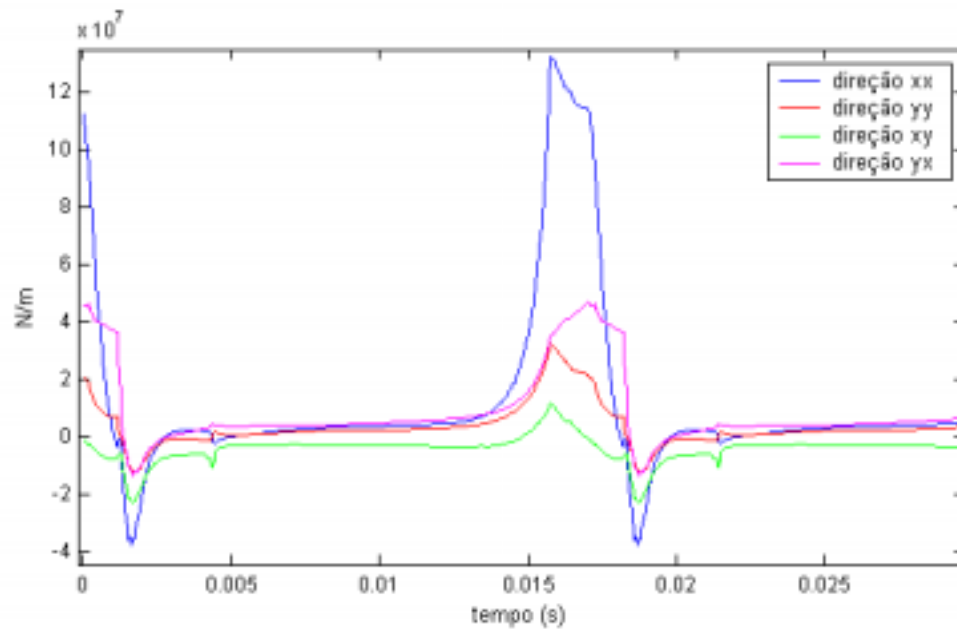


Figura 3. 7: Rigidez para o mancal inferior.

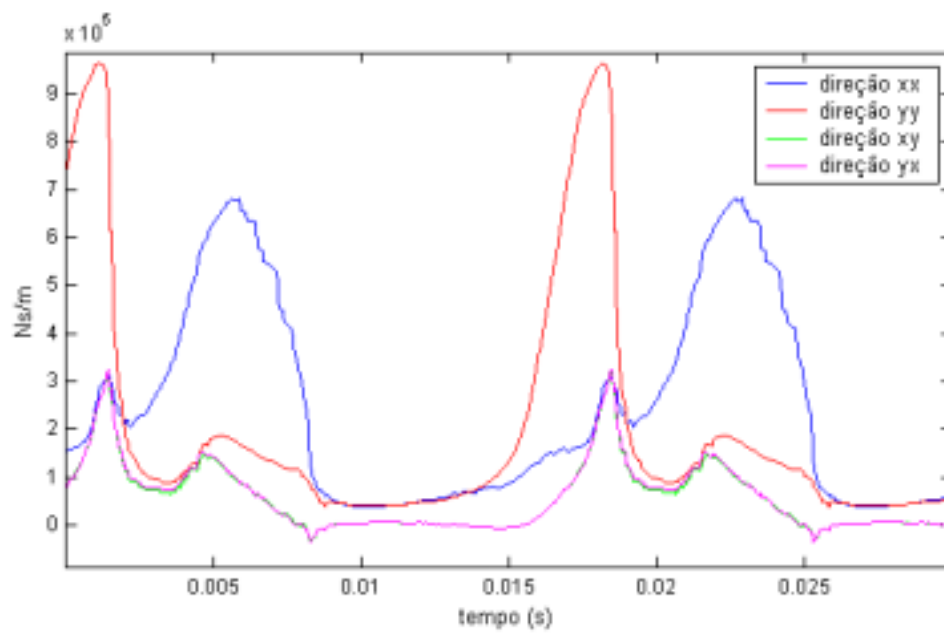


Figura 3. 8: Amortecimento para o mancal superior.

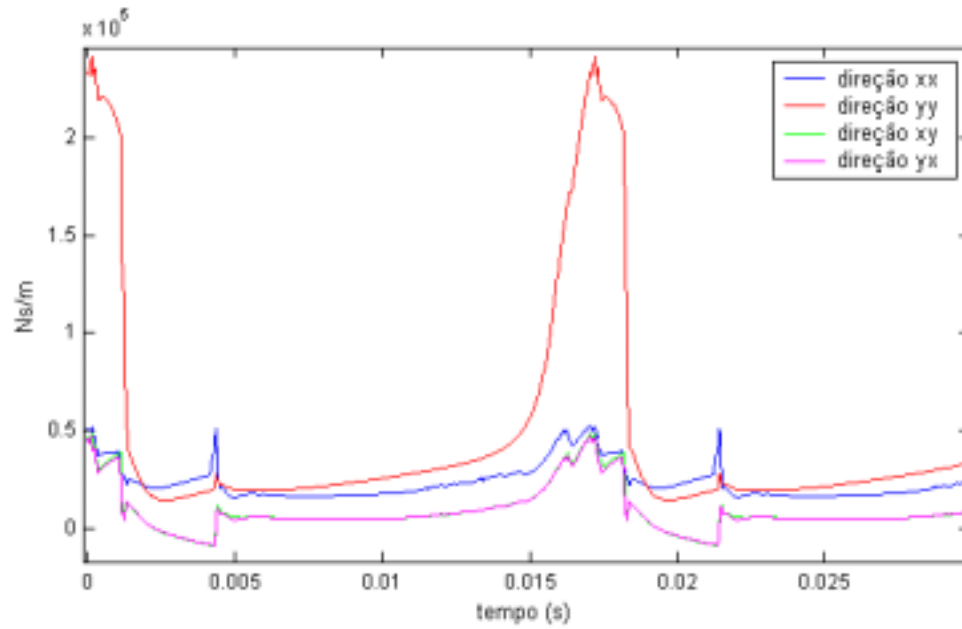


Figura 3. 9: Amortecimento para o mancal inferior.

À primeira vista, alguns pontos mostrados podem causar alguma dificuldade de interpretação, pois foram obtidos valores negativos de rigidez. O sinal de rigidez depende das direções do deslocamento e da força, em função da referência fixa (coordenadas globais), podendo ser encontrados deslocamento em sentido contrário ao da aplicação da força.

Capítulo 4- Esforços transmitidos através dos mancais

As vibrações que ocorrem em sistemas mecânicos elásticos têm características de inércia, rigidez e amortecimento bem como suas possíveis distribuições espaciais. Estes movimentos dinâmicos ocorrem com determinadas intensidades e em certas frequências. As partes envolvidas em um sistema mecânico vibratório são: a excitação que fornece energia ao sistema, o sistema mecânico em questão, e a resposta que representa o movimento do sistema. A resposta deste sistema depende das características da excitação e das suas características físicas.

Neste capítulo será abordado o sistema eixo e mancal do compressor em estudo, partindo de um sistema de um grau de liberdade com uma excitação harmônica, e com valores de rigidez e amortecimento constantes. A partir deste modelo simples serão considerados: valores reais de carga; valores reais de rigidez e amortecimento; aumento do número de graus de liberdade; e, finalmente, um sistema com quatro graus de liberdade com valores reais de cargas, e também rigidez e amortecimento variáveis ao longo do ciclo.

4.1 Análise de um sistema de 1 grau de liberdade

Neste item será apresentado um sistema com um grau de liberdade, com o objetivo de mostrar como foi desenvolvida a metodologia de cálculo das respostas e dos esforços transmitidos através do filme de óleo.

Na Figura 4.1 é representado o sistema com um grau de liberdade. Neste sistema as grandezas são representadas de forma concentrada, onde se tem toda a inércia do sistema concentrada (massa M) representando um corpo rígido, sustentado por uma mola de rigidez k e um amortecimento viscoso c . A coordenada $x(t)$ representa o deslocamento em função do tempo e a função $f(t)$ representa a força de excitação.

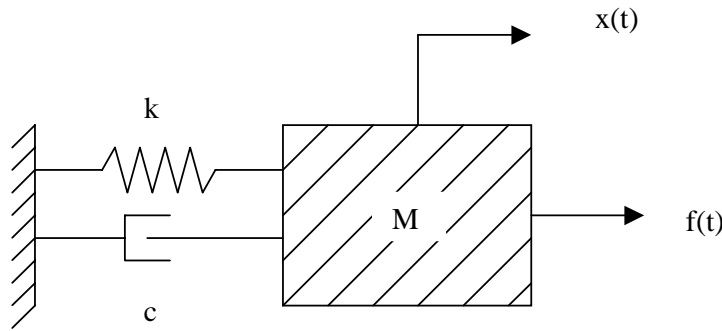


Figura 4. 1: Sistema com um grau de liberdade.

A equação de equilíbrio dinâmico do modelo da Figura 4.1 é mostrada abaixo:

$$M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4.1)$$

Para uma excitação harmônica de frequência ω , a resposta também terá variação harmônica, de frequência ω , tal que

$$f(t) = F_0(\omega)e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

$$x(t) = X(\omega)e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

$$\dot{x}(t) = X(\omega)j\omega e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

$$\ddot{x}(t) = -X(\omega)\omega^2 e^{j\omega t} \quad (4.5)$$

Por substituição das Equações (4.2) a (4.5) na Equação (4.1) obtém-se a resposta:

$$x(t) = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{k - M\omega^2 + j\omega c} \quad (4.6)$$

Quando escrita no domínio da frequência (frequências discretas), a equação do movimento fica:

$$(-\omega^2 M + jc\omega + k) \cdot X(\omega) = F(\omega) \quad (4.7)$$

A função resposta em frequência na forma de receptância resulta na seguinte expressão:

$$\alpha(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{(-\omega^2 M + jc\omega + k)} \quad (4.8)$$

A resolução da equação de movimento, em função do tempo (Equação (4.1)) pode ser realizada pelo método das diferenças finitas. Este método numérico é amplamente conhecido e empregado na dedução de equações diferenciais. Consiste na substituição das derivadas e a resolução se dá progressivamente em incremento no tempo, com rápida convergência e com boa aproximação dos valores encontrados. As substituições a seguir foram realizadas na equação de movimento. O Apêndice A apresenta informações mais detalhadas sobre o método das diferenças finitas. Os valores de velocidade e aceleração podem ser calculadas pelas expressões:

$$\dot{x}_i(t)\Delta t = \frac{1}{2}(x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)) \quad i \geq 2 \quad (4.9)$$

$$\ddot{x}_i(t)\Delta t^2 = x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t) \quad i \geq 2 \quad (4.10)$$

A equação de movimento pode, assim, ser escrita em função dos valores de $x(t)$, para intervalos de tempo diferentes,

$$M\left(\frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta t^2}\right) + c\left(\frac{x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)}{2\Delta t}\right) + kx_i(t) = f(t) \quad (4.11)$$

a qual pode ser, ainda, escrita na seguinte forma:

$$x_{i+1}(t)\left(\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t}\right) + x_i(t)\left(\frac{-2M}{\Delta t^2} + k\right) + x_{i-1}(t)\left(\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{c}{\Delta t}\right) = f(t) \quad (4.12)$$

Com o equacionamento desenvolvido para o caso de um grau de liberdade pode-se, então, realizar os cálculos para um sistema simples. Neste exemplo de aplicação serão realizados os cálculos para uma excitação harmônica, de amplitude unitária e com valores de rigidez e amortecimento constantes, com valores típicos para o filme de óleo, resultando em uma resposta como na Equação (4.6).

$$M=1,20 \text{ kg}$$

$$k=10^8 \text{ N/m}$$

$$c=10^5 \text{ Ns/m}$$

Na Figura 4.2 pode-se observar a forma da variação temporal da força, sendo a frequência de excitação 500 rad/s. Na Figura 4.3 mostra-se a resposta na forma de deslocamento em função do tempo e observa-se que, partindo do estado de repouso, em poucos ciclos a resposta atinge um regime periódico.

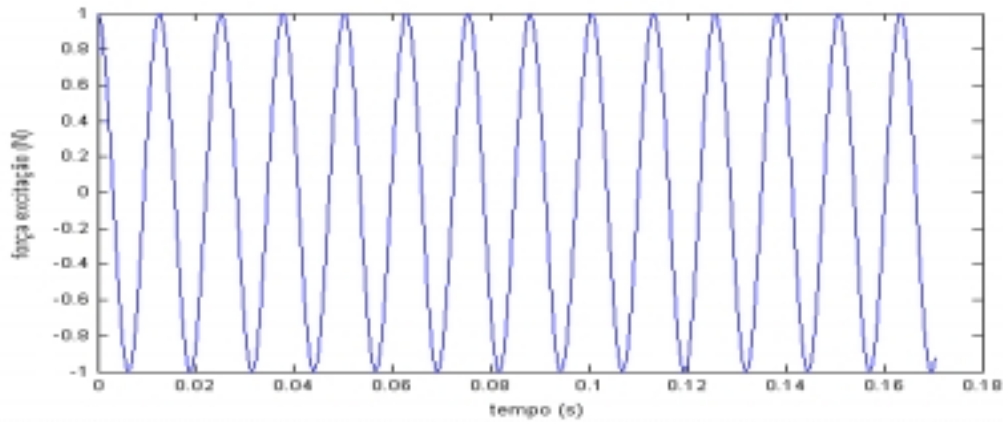


Figura 4. 2: Força de excitação harmônica.

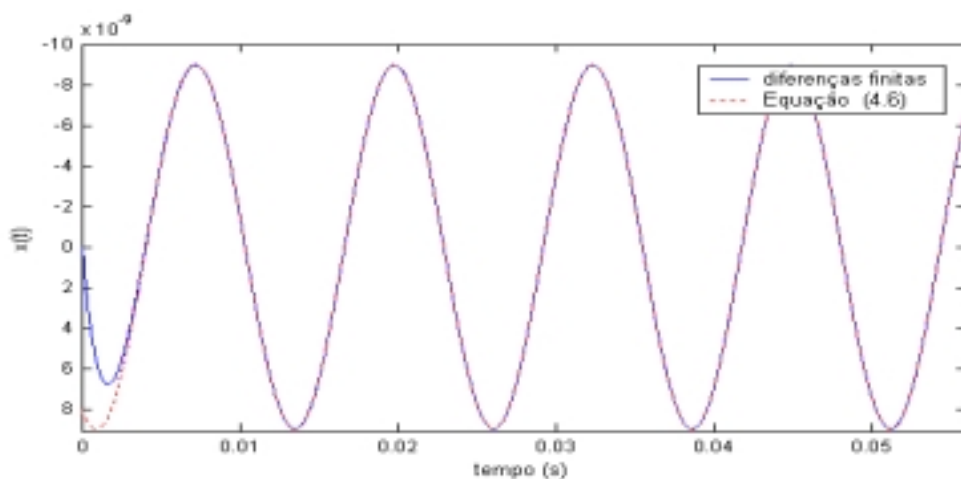


Figura 4. 3: Resposta do deslocamento do sistema de um grau de liberdade calculado pelo método de diferenças finitas, partindo do estado de repouso. A curva em tracejado mostra a resposta nesta mesma frequência considerando regime estacionário.

Partindo da equação receptância (Equação (4.8)) pode-se fazer uma análise do comportamento dinâmico do sistema. A função receptância está mostrada na Figura 4.4 para dois valores de amortecimento. A linha contínua representa cálculos realizados para um amortecimento de 10^5 Ns/m, resultando em um razão de amortecimento de 4,56, conforme definida pela Equação (4.13). A curva tracejada refere-se a valor de amortecimento de 1095 Ns/m, resultando em uma razão de 0,05. Nesta curva pode-se verificar a frequência natural não amortecida (Equação (4.15)). Esta verificação não é possível na curva contínua, pois neste caso, o amortecimento é supercrítico.

A razão de amortecimento é definida como sendo:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (4.13)$$

sendo que o amortecimento crítico, c_c , é definido como:

$$c_c = 2M\omega_i \quad (4.14)$$

onde a frequência natural não amortecida (ω_i) pode ser determinada pela expressão:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (rad/s) \quad (4.15)$$

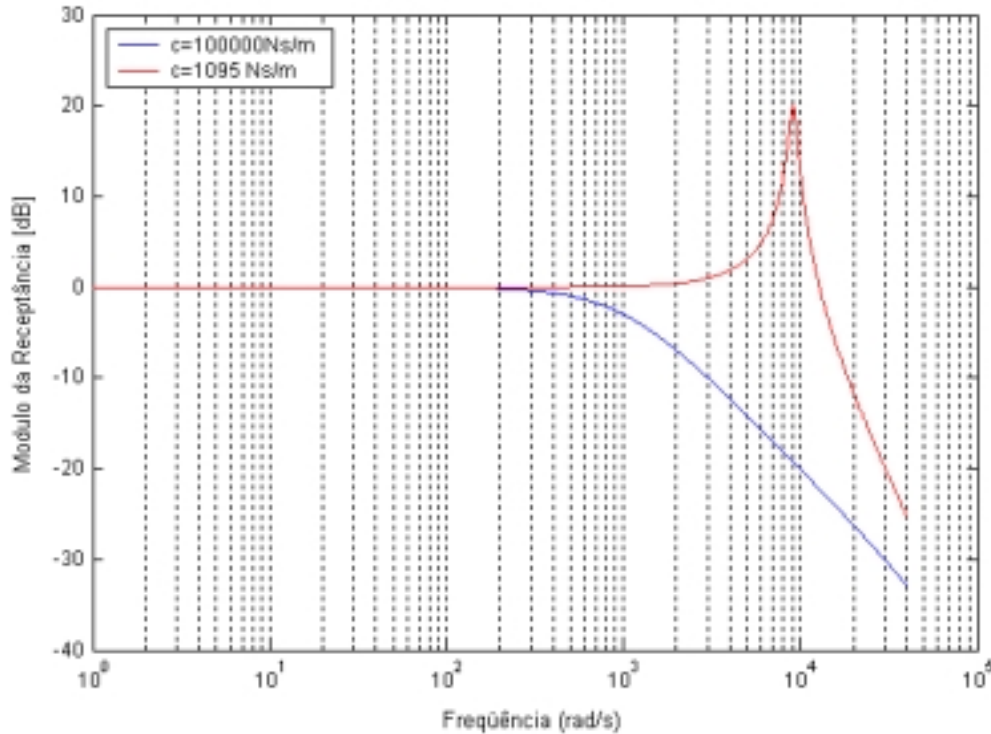


Figura 4. 4: Receptância para 1 GL.

4.2 Sistema de 1 GL com forças reais de compressão do gás

Neste item será analisado o comportamento do sistema de 1 GL considerando uma força típica, que atua nos mancais de um compressor em funcionamento. Para tal serão inicialmente considerados valores constantes de rigidez e de amortecimento. Posteriormente serão usados valores reais de rigidez e amortecimento.

4.2.1 Modelo com valores constantes de rigidez e amortecimento

Neste item será considerada uma força típica sendo aplicada à massa, cujo comportamento é mostrado na Figura 4.5. O modelo considera valores de rigidez e amortecimento constantes e iguais aos utilizados no item 4.1. A abordagem se deu no sentido de determinar as contribuições de cada parâmetro para a composição total da força transmitida através do mancal.

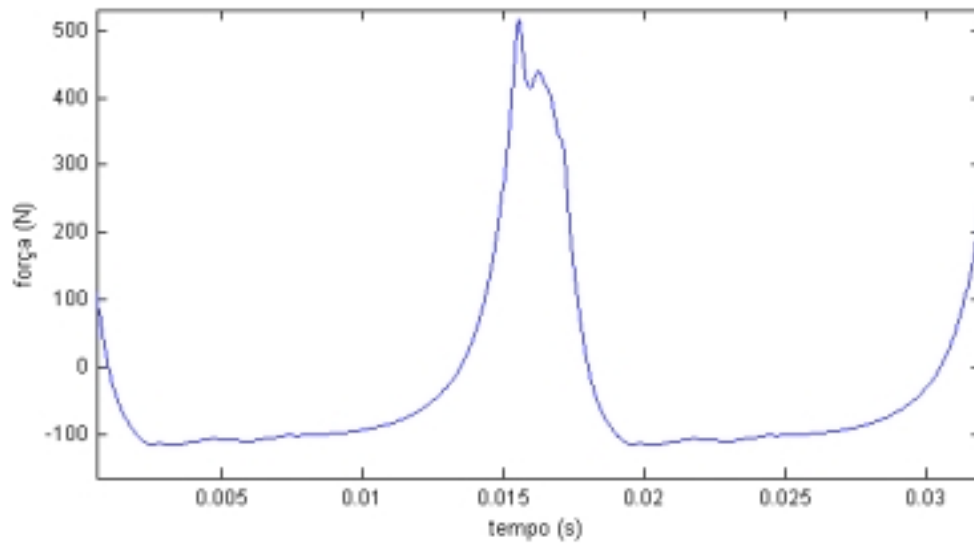
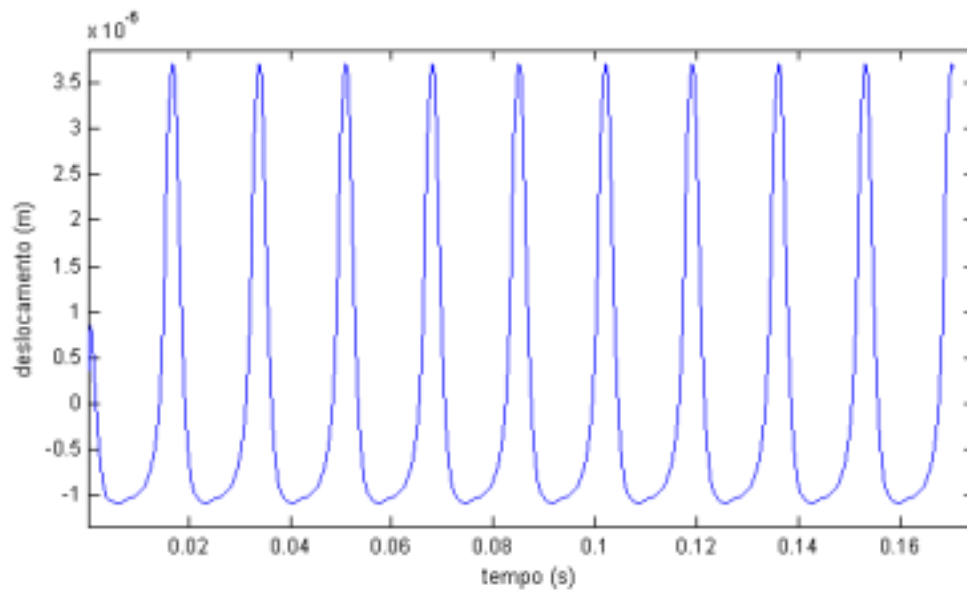
Tal figura mostra a força de excitação, obtida a partir de dados de pressão no cilindro, medida em um compressor em funcionamento em regime permanente e com carga normal de trabalho. Observa-se um pico de força de pouco mais de 500 N.

A Figura 4.6 mostra a resposta do sistema em função do tempo, onde pode-se visualizar a forma do deslocamento e sua amplitude. Verifica-se que a convergência é logo atingida e que, a partir do segundo ciclo, a resposta torna-se periódica.

A discretização utilizada é sempre de 557 pontos por ciclo, para uma velocidade de rotação do eixo aproximadamente de 59 Hz. Consegue-se uma ótima análise até frequências da ordem de 14 kHz, sendo importante para o estudo de ruído em compressores frequências até 10 kHz. Outra justificativa para a utilização de 557 pontos por ciclo se dá devido a ser esta a resolução de dados de entrada como a força do gás no pistão, já medidos anteriormente. Verificou-se que esta resolução garante boa convergência.

Para esta análise foram usados valores constantes de rigidez ($k=10^8$ N/m) e de amortecimento ($c=10^5$ Ns/m).

A fim de analisar as componentes que formam a força total transmitida, foram calculadas as forças transmitidas pela rigidez e pelo amortecimento que estão mostradas na Figura 4.7. Esta figura mostra também a força de inércia, visualizada tanto na figura superior tanto na inferior, em escalas diferentes, para notar quão pequena é a influência da inércia.

**Figura 4. 5: Força de excitação do sistema.****Figura 4. 6: Resposta do modelo para força real.**

Uma análise em relação à inércia indicou que para este modelo seria necessária uma massa acima de 600 kg para que este termo tivesse influência significativa no resultado.

Contatou-se também que tanto a rigidez quanto o amortecimento tem grande importância para o sistema. A Figura 4.8 mostra os espectros em 1/3 de oitava, das três principais forças, mostradas na Figura 4.7. Um aumento em altas frequências foi notado com grande acentuação e, em baixas, houve o cruzamento em algumas frequências não havendo

uma alteração significativa. Observa-se que a força de inércia possui valores muito menores que aqueles referentes aos termos de rigidez e amortecimento.

Este modelo simplificado mostra o procedimento usado neste estudo. Os valores das forças transmitidas pela mola e pelo amortecimento possuem a mesma ordem de grandeza e são somadas vetorialmente. Os seus conteúdos espectrais estão mostrados na Figura 4.8, bem como o da força total transmitida, em faixas de 1/3 oitava, a partir da faixa de 315 Hz.

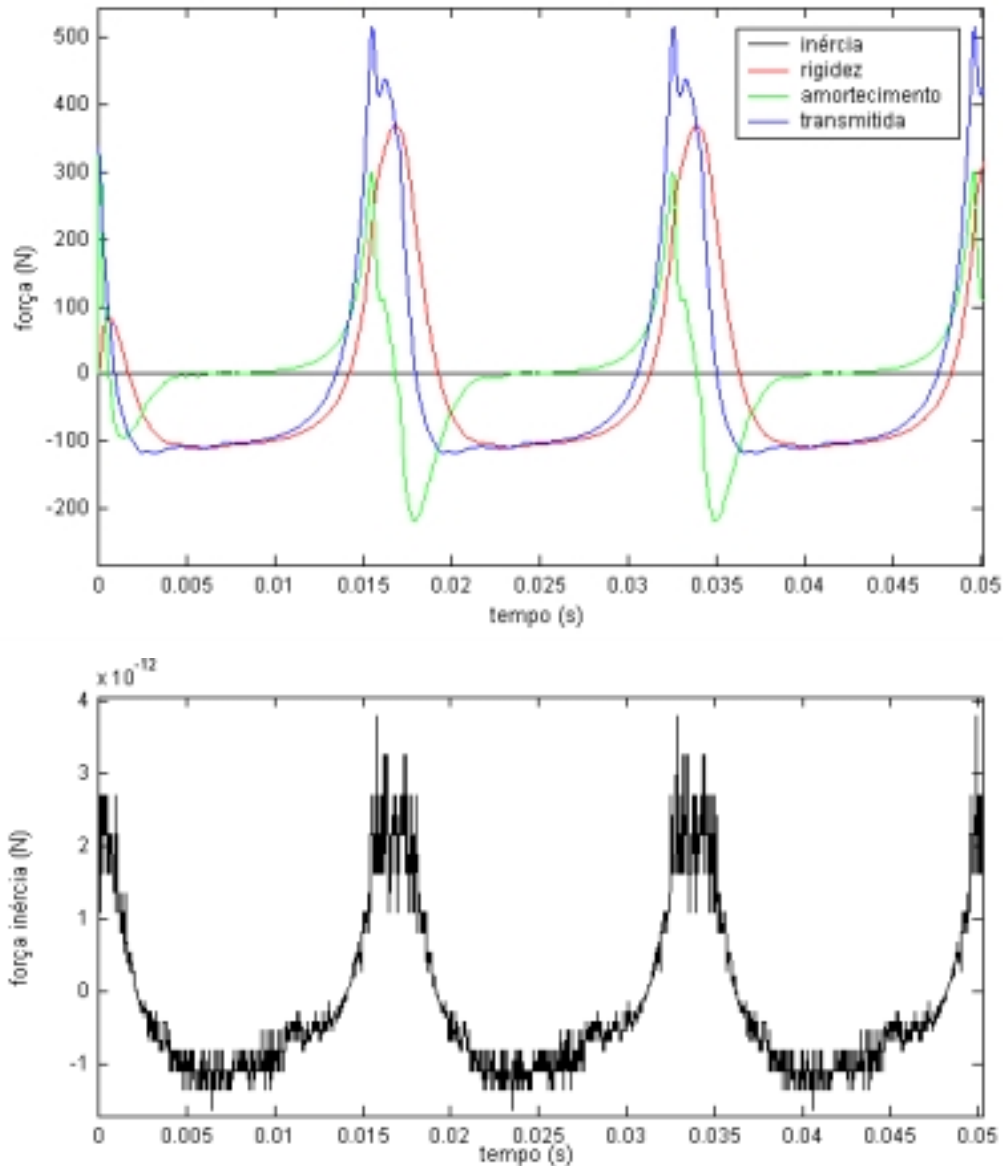


Figura 4. 7: Influência de cada elemento na formação da força transmitida.

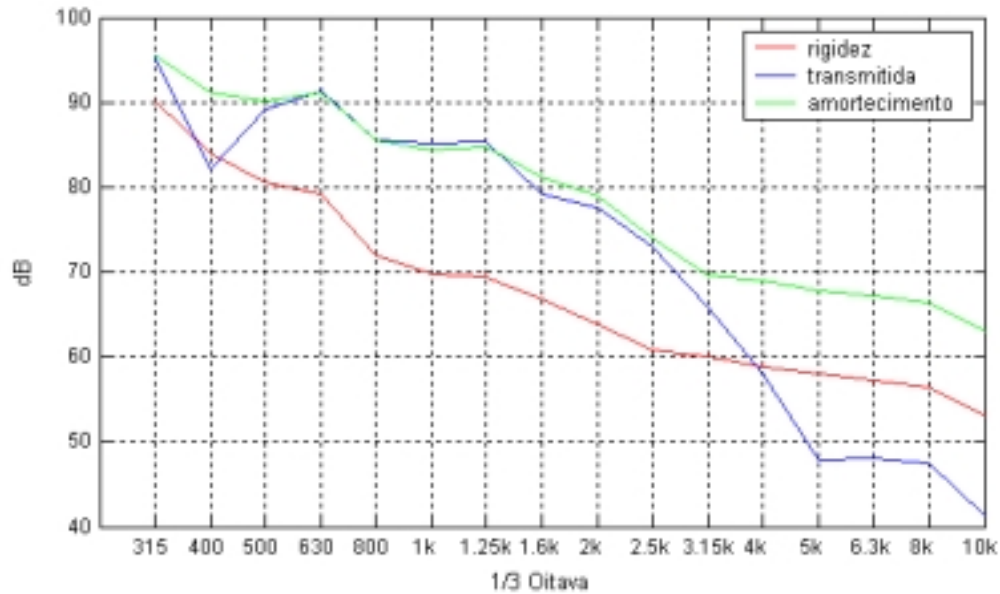


Figura 4. 8: Espectros em 1/3 de oitava das forças do sistema.

4.2.2 Modelo com rigidez e amortecimento variáveis

O modelo a ser abordado neste item é análogo ao apresentado no item anterior, considerando, entretanto desta vez os valores de rigidez e amortecimento reais do mancal e suas variações ao longo do ciclo.

A Figura 4.9 mostra o deslocamento do eixo com estabilização no segundo ciclo, enquanto que na Figura 4.10 são mostradas as contribuições das forças transmitidas pelos efeitos de rigidez, amortecimento e inércia.

Na Figura 4.11 são apresentados os espectros das forças do sistema em 1/3 de oitava para as forças de rigidez, amortecimento e força transmitida. Observa-se, neste caso, que o espectro tornou-se mais plano ao longo da frequência, fazendo com que em altas frequências a contribuição para o nível global tenha aumentado.

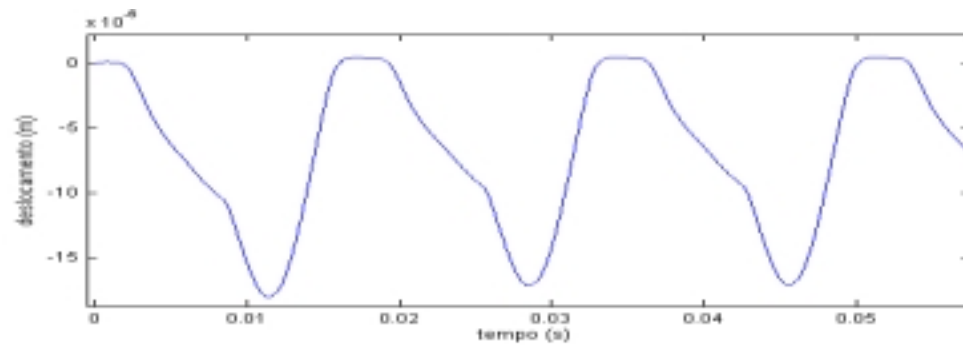


Figura 4. 9: Deslocamento modelo com rigidez e amortecimento variável.

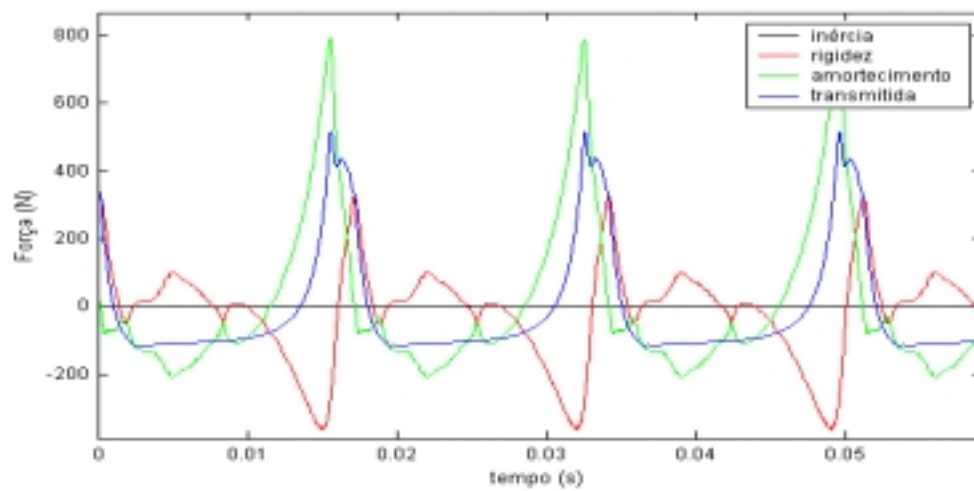


Figura 4. 10: Influência de cada elemento na formação das forças para valores de rigidez e amortecimento variados.

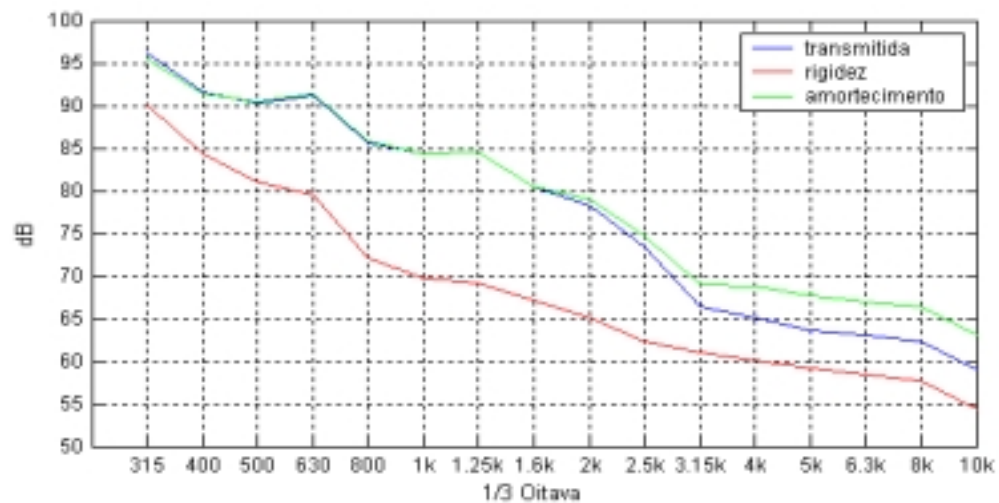


Figura 4. 11: Espectros em 1/3 de oitava das forças do sistema para valores de rigidez e amortecimento variáveis ao longo do ciclo.

4.3 Esforços transmitidos pelo mancal superior

Neste item serão analisados os esforços transmitidos somente pelo mancal superior, porém, com dois graus de liberdade, conforme mostra a Figura 4.12. A coordenada na direção y representa a direção do movimento longitudinal ao pistão, e a coordenada na direção x , o movimento transversal ao pistão.

O modelo possui dois graus de liberdade e incorpora valores de rigidez e amortecimento de orientações xy e yx , para as quais a aplicação de força na direção x causa deslocamentos em y e aplicação de força em y causa deslocamentos em x . Estas definições foram explanadas no Capítulo 3. Um melhor entendimento do modelo pode ser obtido a partir da Figura 4.12.

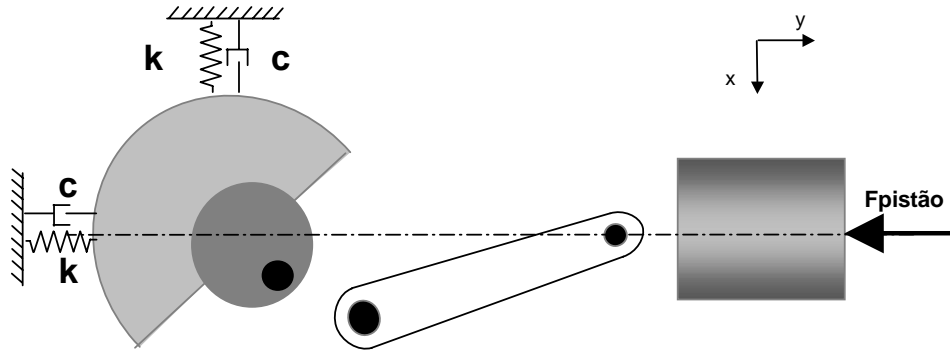


Figura 4. 12: Modelo do mancal superior.

As Equações (4.16) e (4.17) são as equações de movimento do modelo representado na Figura 4.12.

$$F_x = m \cdot \ddot{a}$$

$$M_e \cdot \ddot{x}_e = k_{esxy}(y_e) + c_{esxy}(\dot{y}_e) + k_{esx}(-x_e) + c_{esx}(-\dot{x}_e) + F_{bex} + F_{cp0x} + F_{cp1x} + F_{cp2x} + F_{ex} \quad (4.16)$$

e

$$F_y = m \cdot \ddot{a}$$

$$M_e \cdot \ddot{y}_e = k_{esyx}(x_e) + c_{esyx}(\dot{x}_e) + k_{esy}(-y_e) + c_{esy}(-\dot{y}_e) + F_{bey} + F_{cp0y} + F_{cp1y} + F_{cp2y} + F_{ey} \quad (4.17)$$

Nas próximas figuras são plotadas as respostas do modelo acima, são apresentadas na forma de gráficos. As Figuras 4.13 e 4.14 mostram a intensidade das forças referentes à direção x, enquanto que nas Figuras 4.15 e 4.16 aquelas referentes à direção y. Finalmente, as Figuras 4.17 a 4.20 representam os espectros em 1/3 de oitavas das forças para ambas as componentes de forças. A Figura 4.13 mostra também a força de inércia, visualizada tanto na figura superior tanto na inferior em escalas diferentes para notar quão pequena é a influencia da inércia.

Todos estes gráficos mostram a continuação da tendência já verificada nos itens anteriores, ou seja, a influência da inércia muito pequena e forças devidas ao amortecimento mais significativas que as de rigidez. Todas estas figuras mostram que a soma vetorial do amortecimento e rigidez resulta na força de entrada do sistema, o que significa uma razão de forças igual a um.

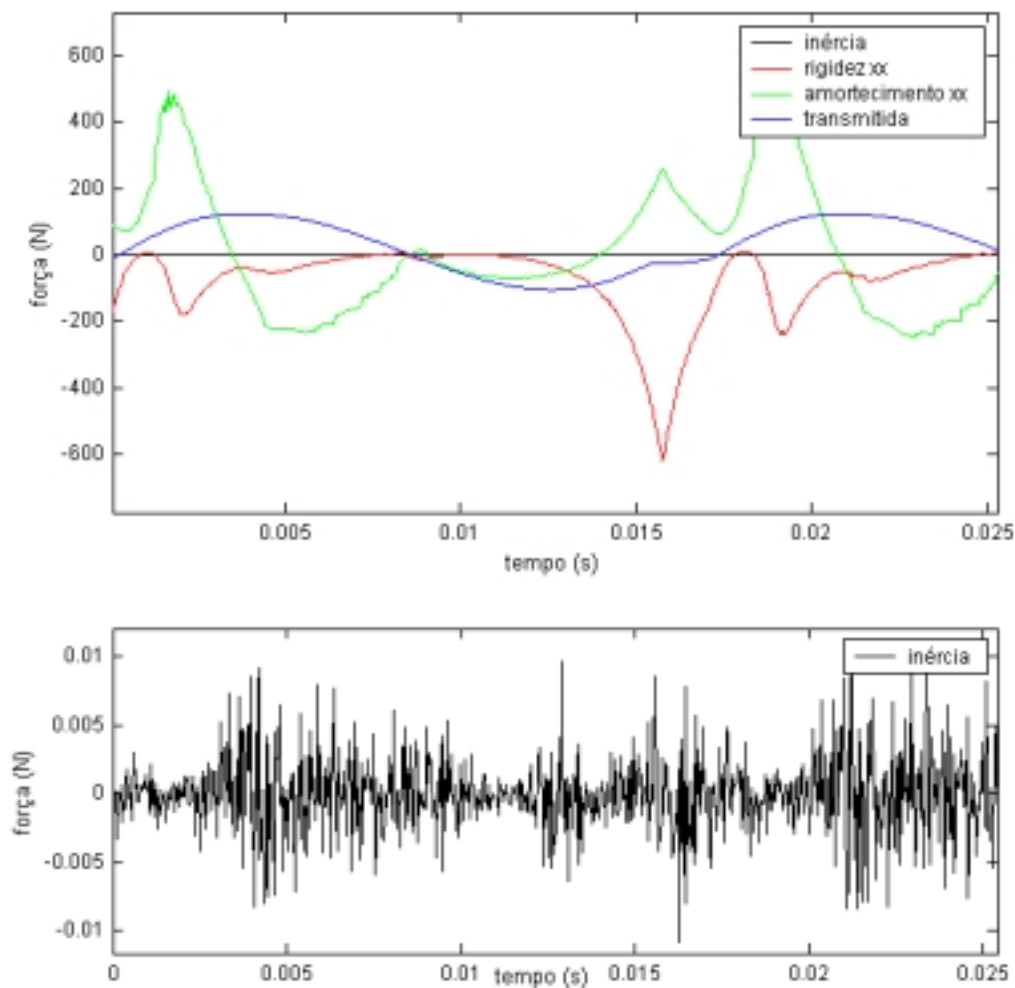


Figura 4. 13: Forças transmitidas na direção x, somente pelo mancal superior.

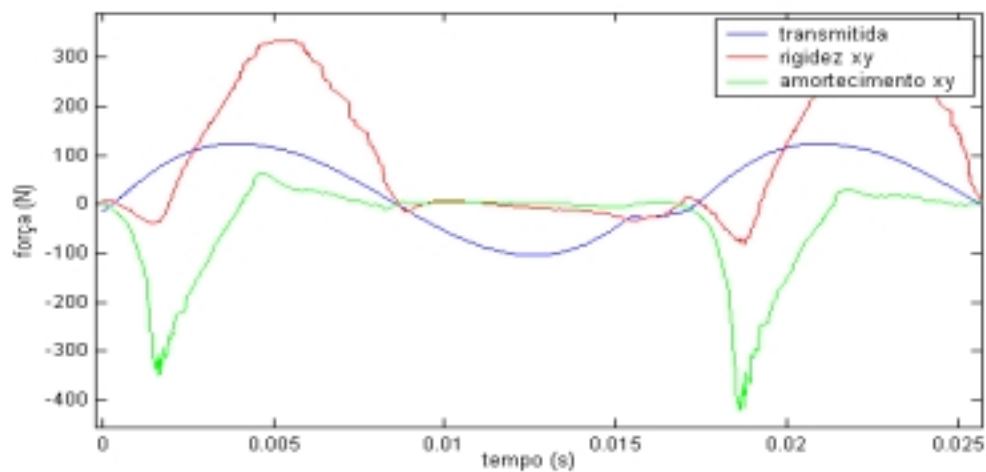


Figura 4. 14: Forças transmitidas na direção x, somente pelo mancal superior.

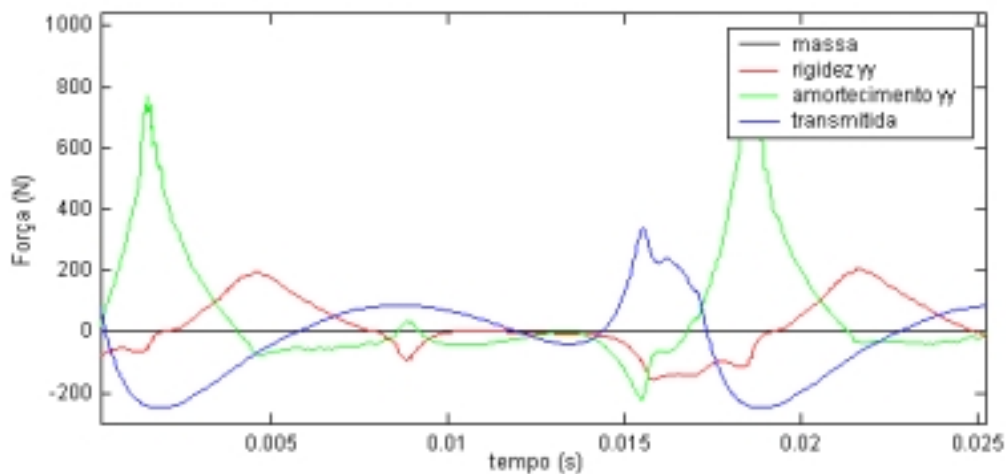


Figura 4. 15: Forças transmitidas na direção y, somente pelo mancal superior.

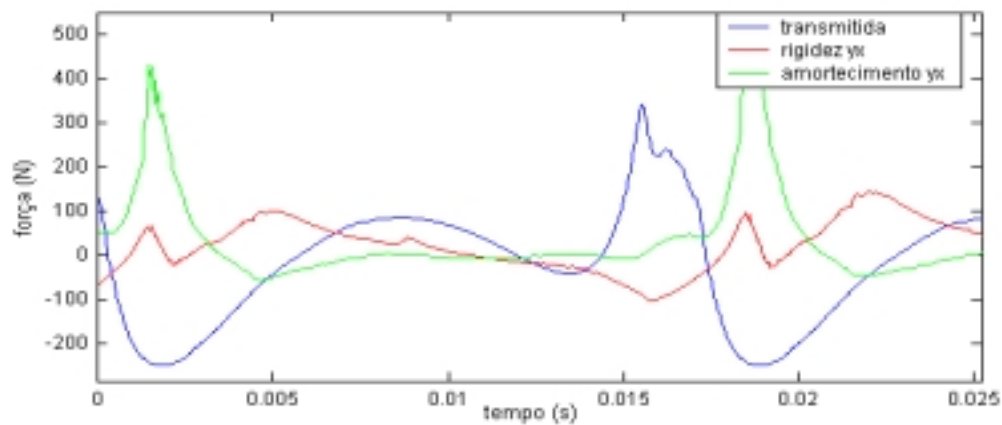


Figura 4. 16: Forças transmitidas na direção y, somente pelo mancal superior.

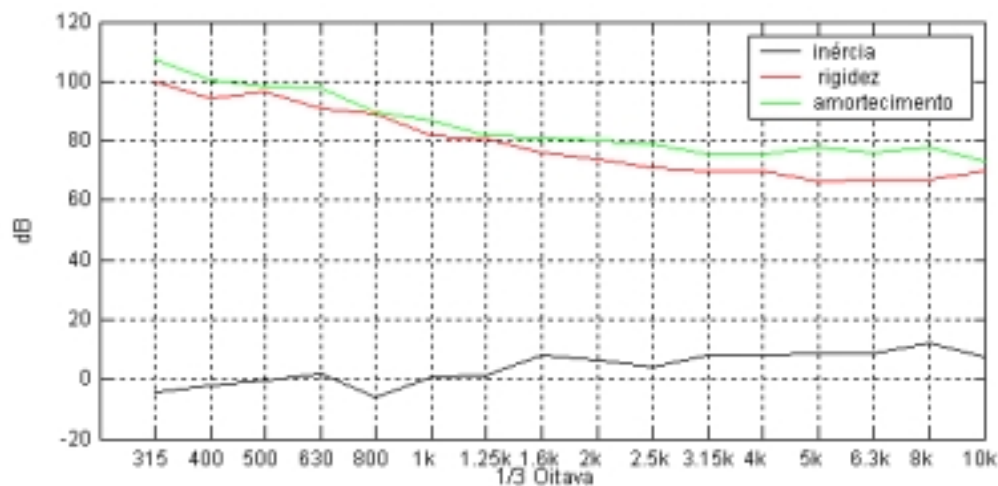


Figura 4. 17: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, somente pelo mancal superior.

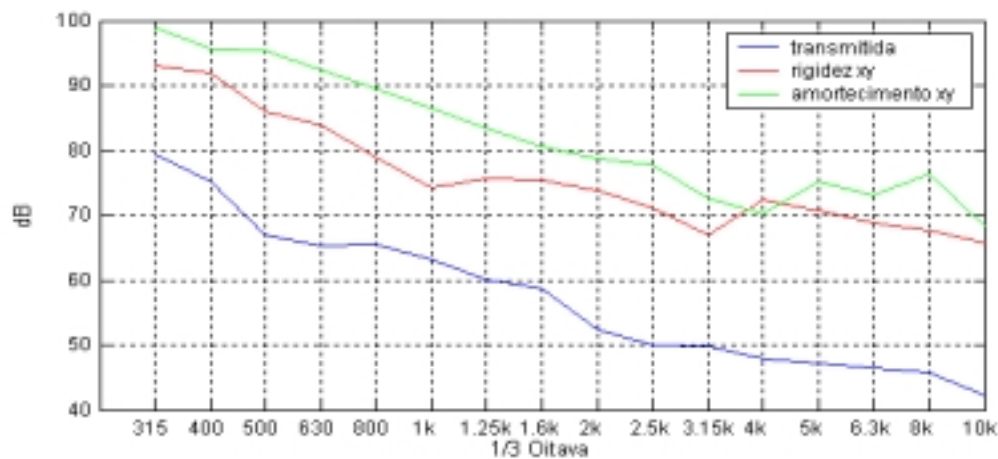


Figura 4. 18: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, somente pelo mancal superior.

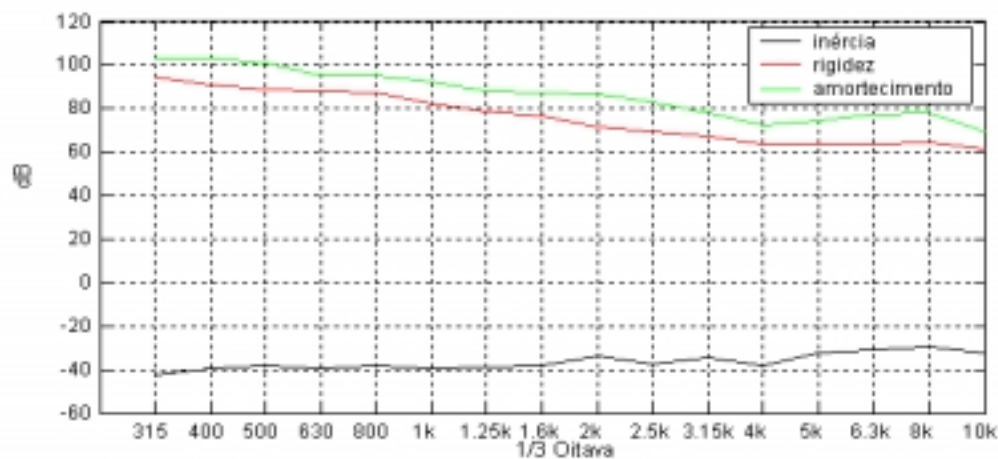


Figura 4. 19: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, somente pelo mancal superior.

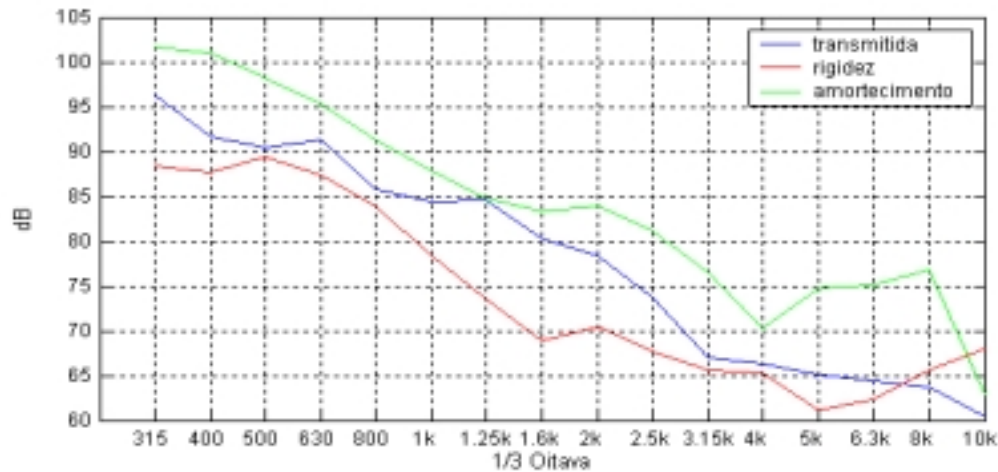


Figura 4. 20: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, somente pelo mancal superior.

4.4 Sistema com mancal superior e inferior

Neste item serão analisados os esforços transmitidos tanto pelo mancal superior como pelo mancal inferior, sendo que as referências das coordenadas x e y são as mesmas das anteriores, ou seja, na coordenada y tem-se movimentação longitudinal do pistão, e na coordenada x movimentação transversal do pistão.

O modelo possui quatro graus de liberdade e com incorporação também dos valores de rigidez e amortecimento de orientação xy e yx, conforme já vistas no Capítulo 3. Um melhor entendimento do modelo pode ser obtido a partir da Figura 4.21. Nesta Figura podem-se visualizar os quatro graus de liberdade: movimento na coordenada x; movimento na coordenada y; rotacional na coordenada x e finalmente rotacional na coordenada y.

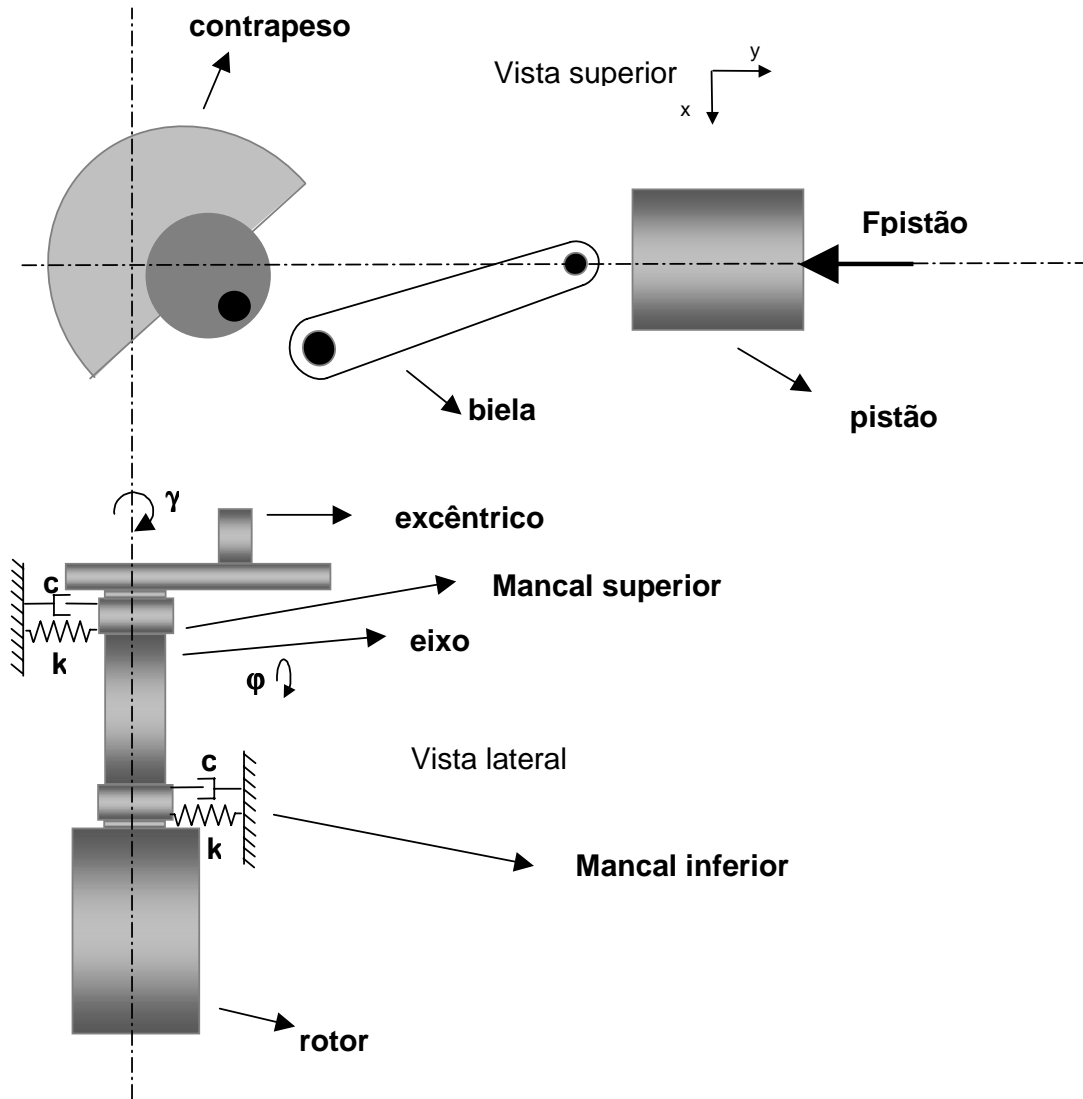


Figura 4. 21: Modelo para quatro graus de liberdade.

As Equações (4.18) a (4.21) são as equações de movimento do modelo:

$$F_x = m \cdot \ddot{a}_x$$

$$M_e \cdot \ddot{x}_e = k_{esxy}(y_e) + c_{esxy}(\dot{y}_e) + k_{eixy}(y_e) + c_{eixy}(\dot{y}_e) + k_{eix}(x_e) + c_{eix}(\dot{x}_e) + k_{ess}(-x_e) + c_{ess}(-\dot{x}_e) + F_{bex} + F_{cp0x} + F_{cp1x} + F_{cp2x} + F_{ex} \quad (4.18)$$

$$F_y = m \cdot \ddot{a}_y$$

$$M_e \cdot \ddot{y}_e = k_{esyx}(x_e) + c_{esyx}(\dot{x}_e) + k_{eiyx}(x_e) + c_{eiyx}(\dot{x}_e) + k_{eiy}(y_e) + c_{eiy}(\dot{y}_e) + k_{esy}(-y_e) + c_{esy}(-\dot{y}_e) + F_{bey} + F_{cp0y} + F_{cp1y} + F_{cp2y} + F_{ey} \quad (4.19)$$

$$M = J \cdot \ddot{\phi}$$

$$\begin{aligned} J_{\phi} \cdot \ddot{\phi}_e = & [k_{esxy}(y_e - \gamma_e \cdot h_2) + c_{esxy}(\dot{y}_e - \dot{\gamma}_e \cdot h_2)] \cdot h_2 + [k_{eixy}(y_e - \gamma_e \cdot h_3) + \\ & c_{eixy}(-\dot{y}_e - \dot{\gamma}_e \cdot h_3)] \cdot h_3 + [k_{eix}(-x_e - \phi_e \cdot h_3) + c_{eix}(-\dot{x}_e - \dot{\phi}_e \cdot h_3)] \cdot h_3 + \\ & [k_{ess}(-x_e - \phi_e \cdot h_2) + c_{ess}(-\dot{x}_e - \dot{\phi}_e \cdot h_2)] \cdot h_2 + F_{cp0x} \cdot (h_1 + d_{cp0}) + \\ & F_{cp1x} \cdot (h_1 + d_{cp1}) + F_{cp2x} \cdot (h_1 + d_{cp2}) + F_{ex} \cdot (h_1) + F_{bex} \cdot (h_1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$M = J \cdot \ddot{\gamma}$$

$$\begin{aligned} J_{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}_e = & [k_{esyx}(x_e - \phi_e \cdot h_2) + c_{esyx}(x_e - \dot{\phi}_e \cdot h_2)] \cdot h_2 + [k_{eiyx}(x_e - \phi_e \cdot h_3) + \\ & c_{eiyx}(x_e - \dot{\phi}_e \cdot h_3)] \cdot h_3 + [k_{eiy}(-y_e - \gamma_e \cdot h_3) + c_{eiy}(-\dot{y}_e - \dot{\gamma}_e \cdot h_3)] \cdot h_3 + \\ & [k_{esy}(-y_e - \gamma_e \cdot h_2) + c_{esy}(-\dot{y}_e - \dot{\gamma}_e \cdot h_2)] \cdot h_2 + F_{cp0y} \cdot (h_1 + d_{cp0}) + \\ & F_{cp1y} \cdot (h_1 + d_{cp1}) + F_{cp2y} \cdot (h_1 + d_{cp2}) + F_{ey} \cdot (h_1) + F_{bey} \cdot (h_1) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nas próximas figuras vários gráficos são plotados, sendo as respostas do modelo de 4 GL. Nas Figuras 4.22 e 4.23 são as forças referentes à direção x para o mancal superior, nas duas seguintes forças na direção y para o mancal superior. Nas Figuras 4.26 e 4.27 espectros em 1/3 de oitavas das forças na direção x para o mancal superior e logo após os espectros das forças na direção y. O mesmo ocorre para as oito figuras seguintes porém sendo agora para o mancal inferior.

Mais uma vez, todos os gráficos mostram a mesma tendência já verificada nos itens anteriores, ou seja, a pequena influência da inércia. Observa-se também que as forças causadas pelo efeito de amortecimento são mais significativas que as forças causadas pelo efeito de rigidez, e que a soma vetorial das reações nos mancais são muito próximas dos valores das forças de excitação.

Algumas hipóteses desta tendência se dão devido ao fato de se ter uma rigidez variando no tempo, se ter um superamortecimento (chegando em alguns pontos do ciclo com valores na casa de centenas de vezes a razão de amortecimento crítico) e finalmente por ter uma folga de 15 μm entre mancais e eixo para o compressor em estudo. A pequena folga faz com que as pequenas amplitudes de movimento relativo entre as partes móveis não permita a estes componentes desenvolverem forças significativas de inércia.

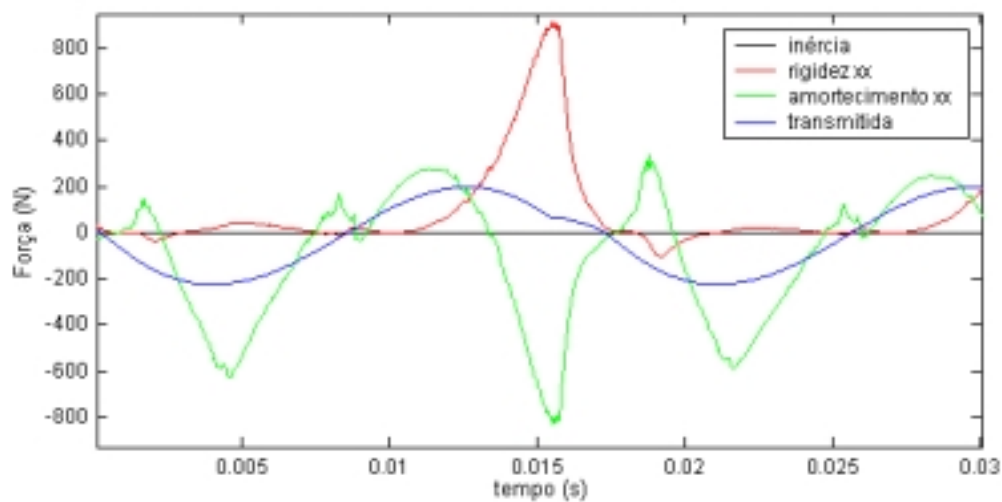


Figura 4. 22: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção x.

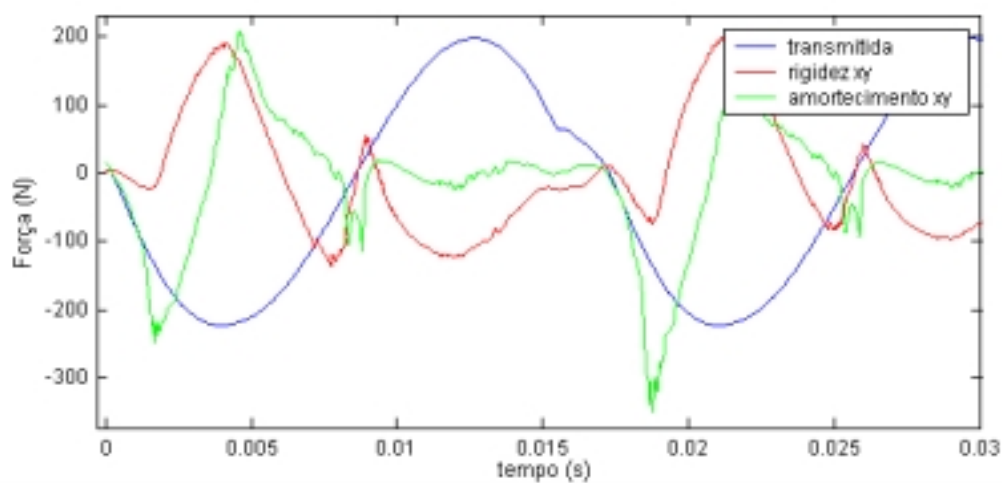


Figura 4. 23: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção x.

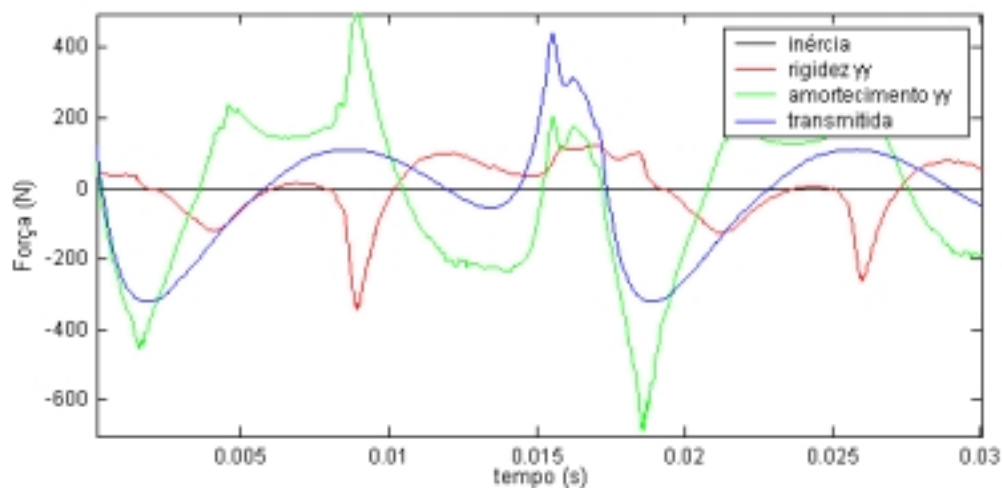


Figura 4. 24: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção y.

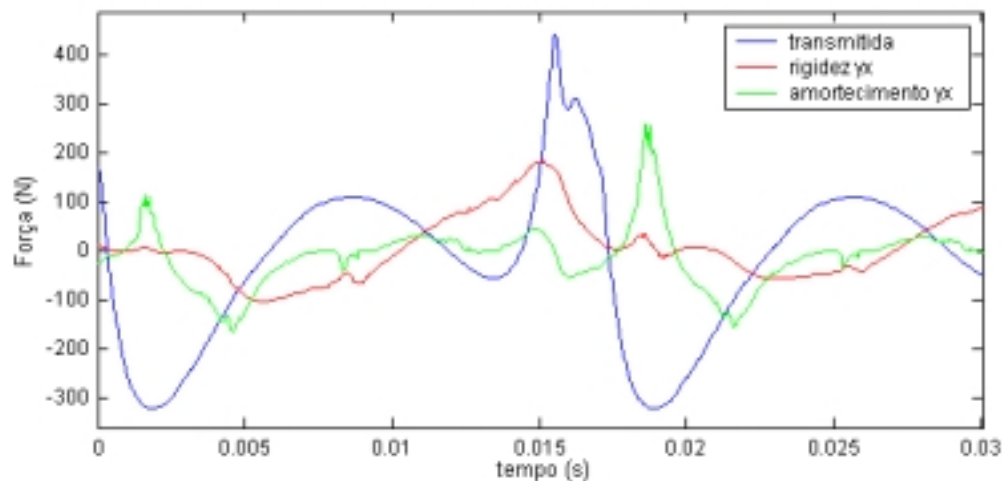


Figura 4. 25: Forças transmitidas pelo mancal superior na direção y.

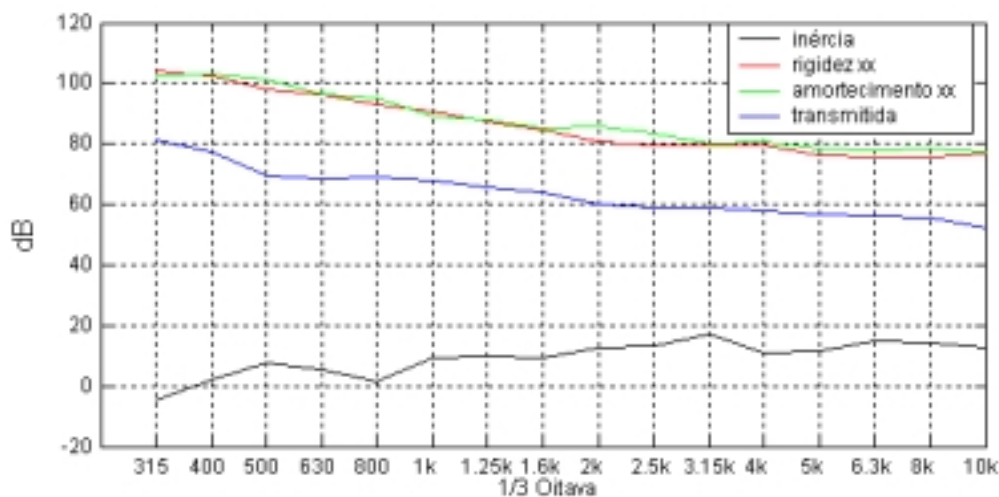


Figura 4. 26: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, no mancal superior.

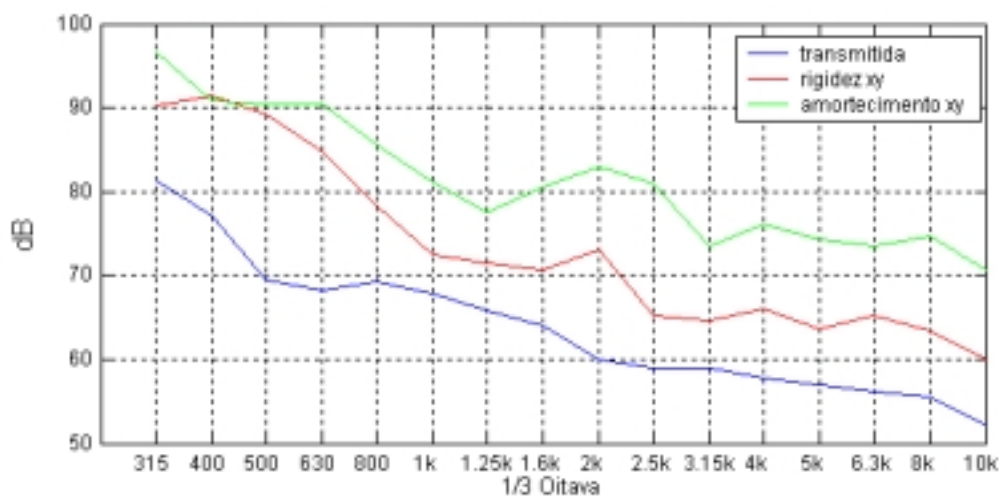


Figura 4. 27: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, no mancal superior.

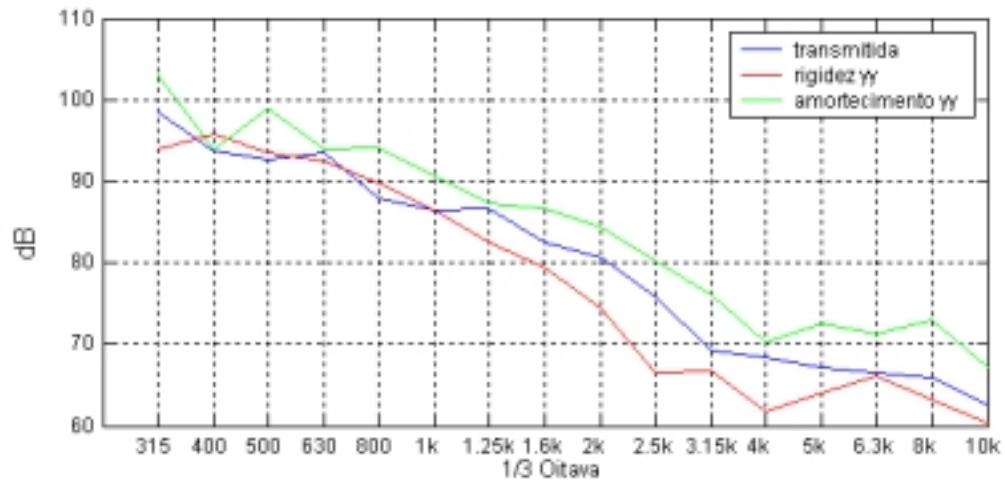


Figura 4. 28: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, no mancal superior.

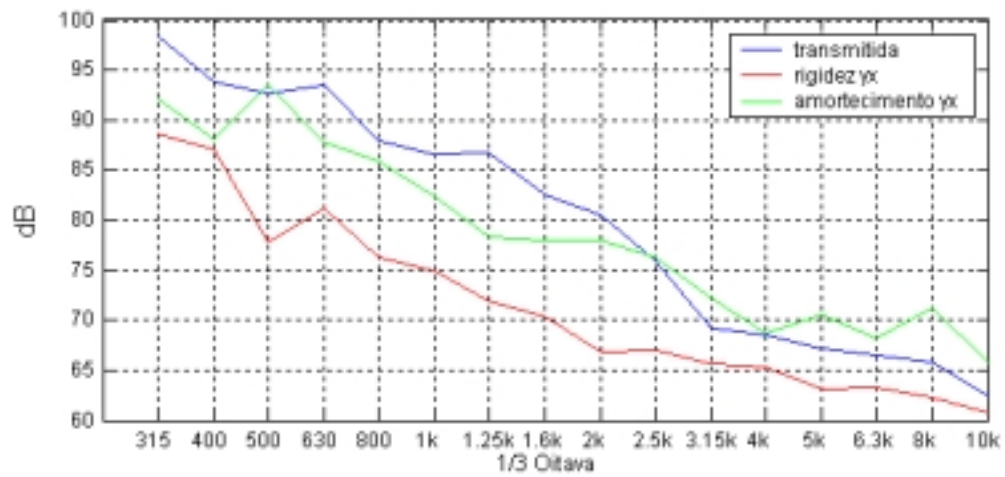


Figura 4. 29: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, no mancal superior.

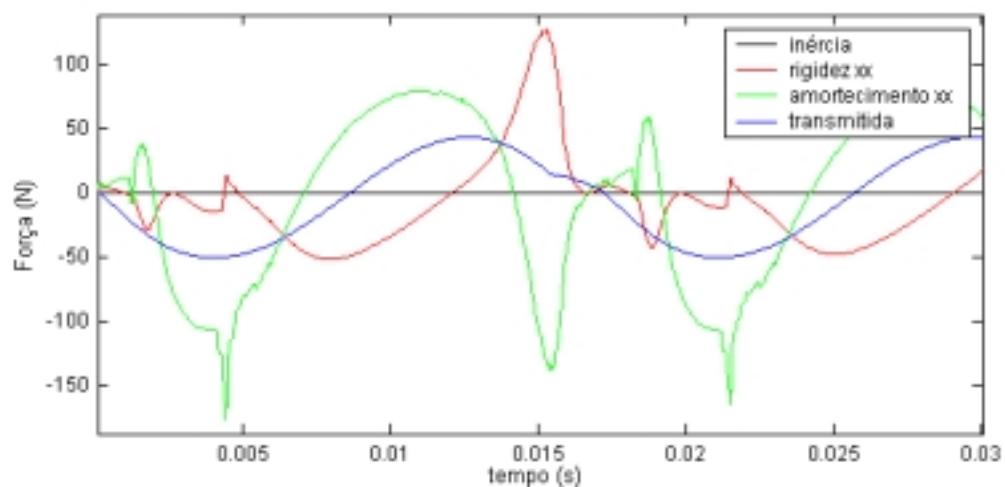


Figura 4. 30: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção x.

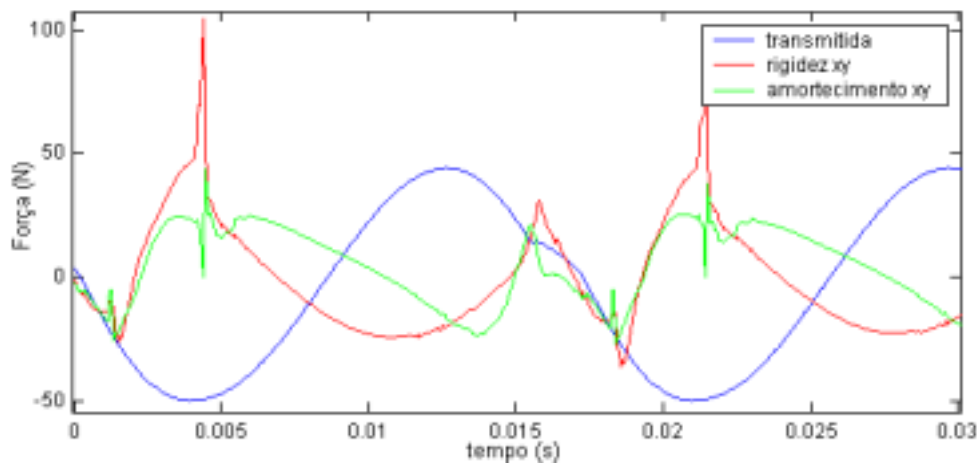


Figura 4. 31: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção x.

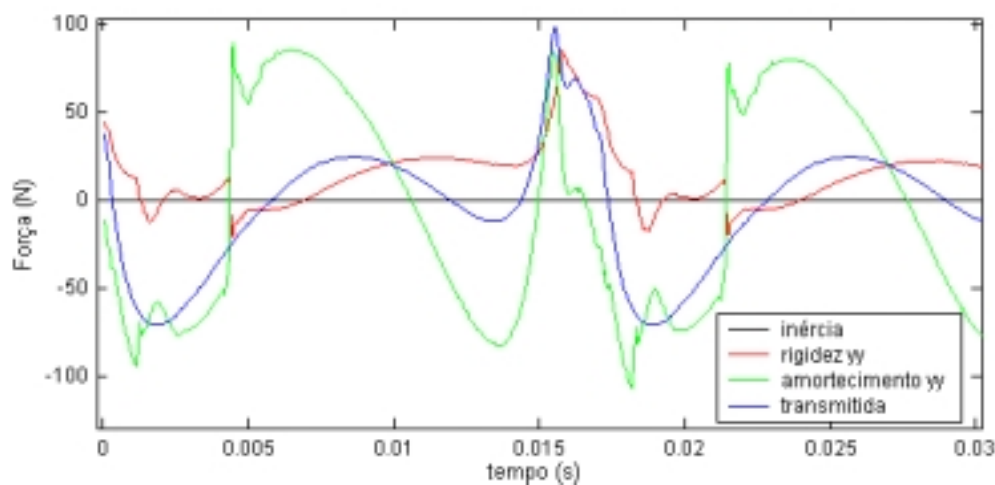


Figura 4. 32: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção y.

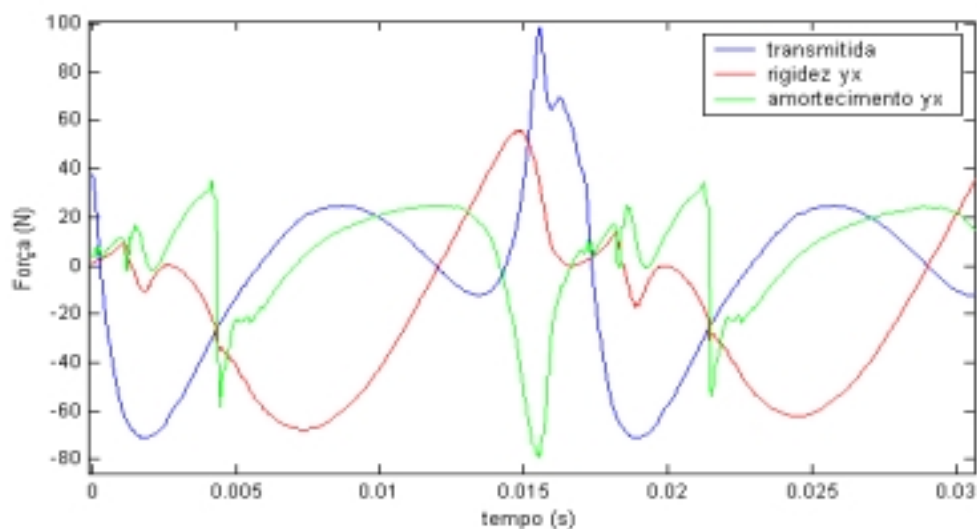


Figura 4. 33: Forças transmitidas pelo mancal inferior na direção y.

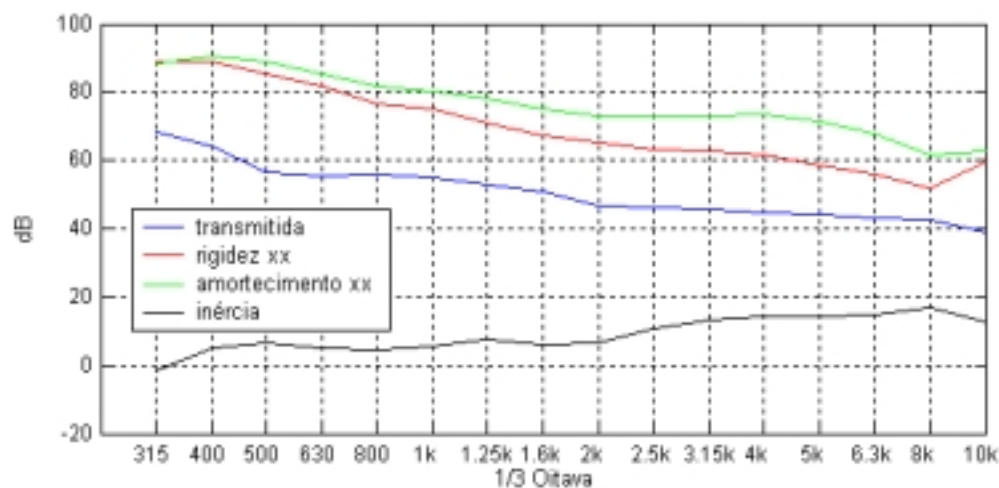


Figura 4.34: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, pelo mancal inferior.

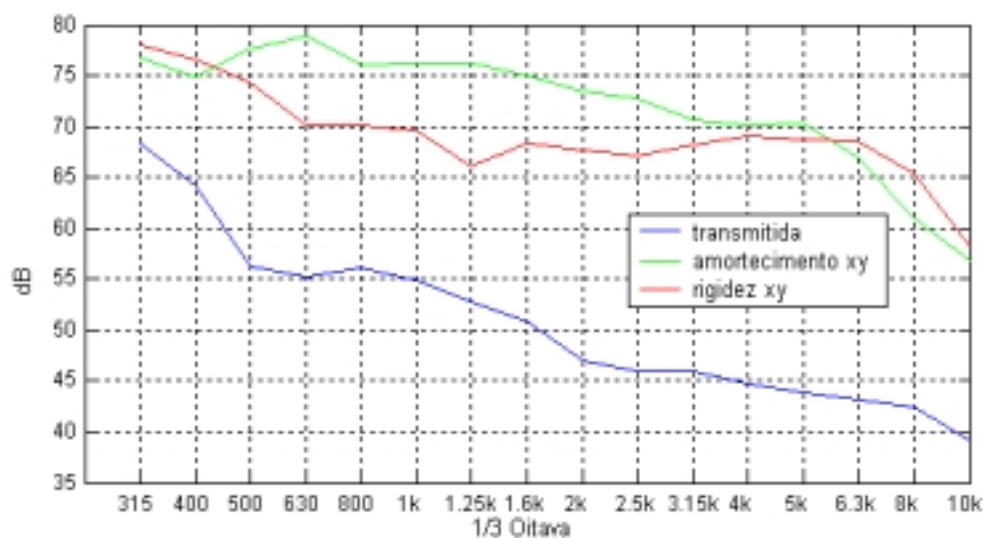


Figura 4.35: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção x, pelo mancal inferior.

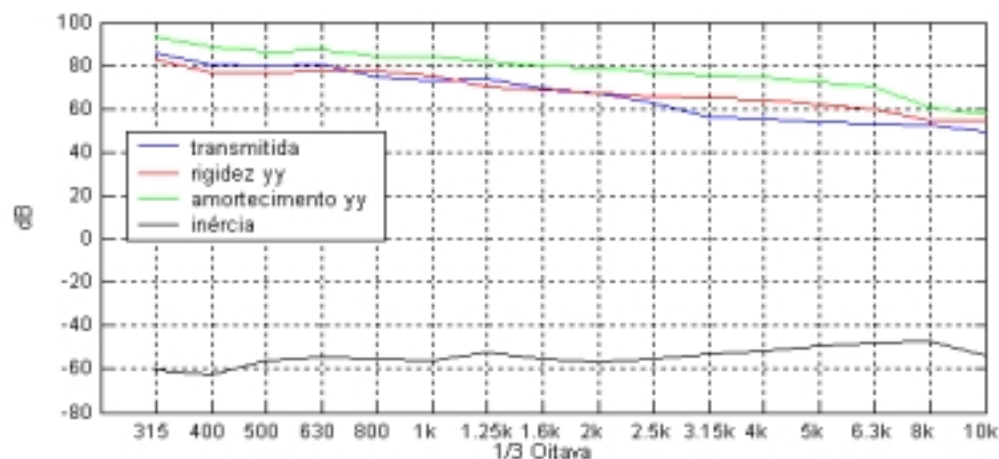


Figura 4.36: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, pelo mancal inferior.

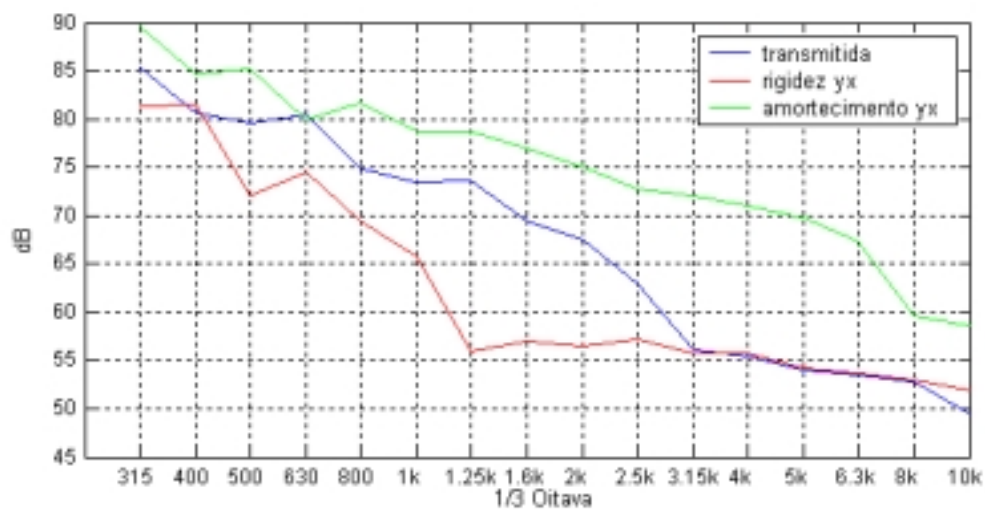


Figura 4. 37: Espectros em 1/3 oitava para forças na direção y, pelo mancal inferior.

Capítulo 5 – Respostas do conjunto motor-compressor às forças de compressão do gás

5.1 Modelo numérico do conjunto motor-compressor

Um modelo numérico por elementos finitos vem sendo desenvolvido para a avaliação das respostas às excitações causadas pela compressão do gás no cilindro. É composto por um bloco de aço fundido, lâminas e enrolamento simulando o estator, batentes de molas, placa de válvulas e molas como pode ser visualizado nas Figura 5.1 e 5.2.

É possível visualizar que a força de pressão (F_p) produz reações nos mancais (F_s – força no mancal superior; F_i – força no mancal inferior). Os valores das forças utilizadas para a simulação do compressor em funcionamento são aqueles derivados da cinemática das partes móveis, desenvolvida no Capítulo 2.

Na Figura 5.2 são mostradas as forças transversais que, como visto no Capítulo 2, são menores que as anteriores. A componente da força lateral no cilindro também é mostrada. Estas excitações são fornecidas em forma de tabelas para o programa de elementos finitos. Geralmente, utiliza-se uma discretização (Δf) de 4 a 8 Hz, e a faixa de frequência de análise estende-se até 10 kHz. Neste modelo serão aplicadas as forças obtidas anteriormente.

O modelo em elementos finitos foi modelado com a seguinte configuração: 9298 nós; 23966 elementos. Para o bloco foram utilizados elementos sólidos tetraédricos resultando num total de 17260 elementos. Os parafusos foram também modelados com elementos sólidos hexaédricos totalizando 384 elementos. Elementos planos foram utilizados no enrolamento com a presença de 3 nós para elementos externos, sendo 486 elementos e com 4 nós para o

enrolamento interno sendo 126 elementos. Os batentes de mola resultaram de 1484 elementos de 3 nós e as placas de válvulas com 155 elementos com 3 nós, todos com elementos planos. Os elementos de barras foram utilizados para a ligação do enrolamento interno com as lâminas sendo 525 elementos, nas 4 molas com um total de 1311 elementos e placa de válvulas com 16 elementos. Os elementos de corpo rígido foram utilizados na ligação bloco-estator com 28 elementos e finalmente estator-batentes com 35 elementos. As condições de contorno utilizadas foram as resultantes das forças nos mancais e placa de válvulas, e engastado nas molas.

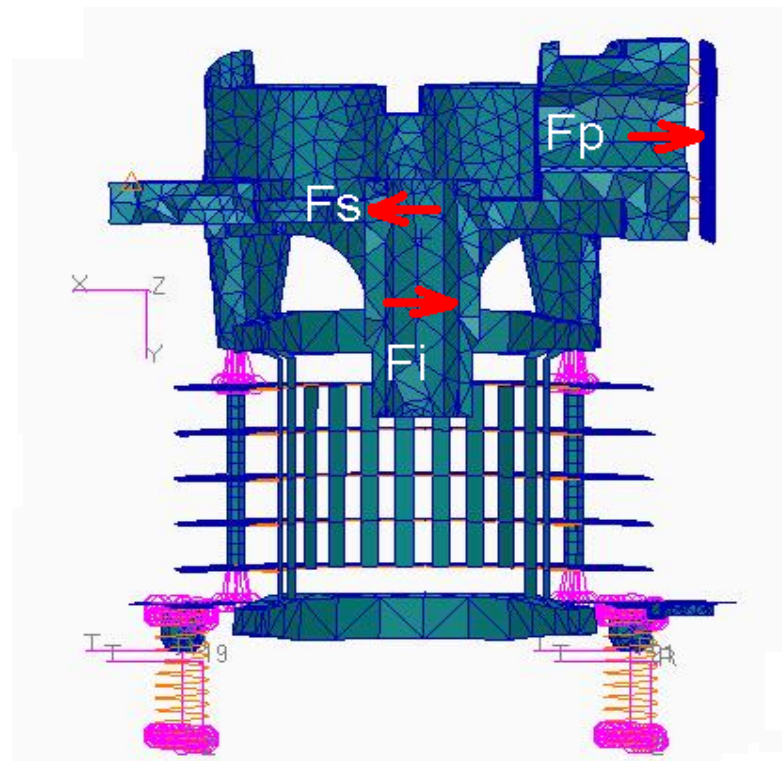


Figura 5. 1: Modelo numérico do kit – forças na direção do pistão.

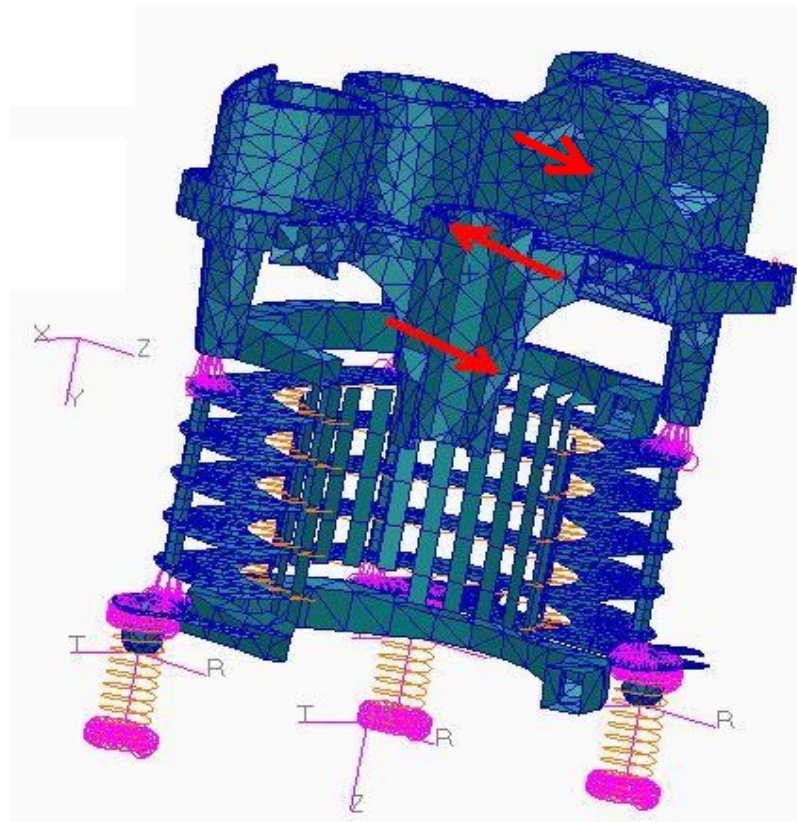


Figura 5. 2: Modelo numérico do kit – forças na direção transversal.

5.2 Efeito da espessura do filme de óleo nas forças transmitidas

Inicialmente, será apresentada uma análise qualitativa com respeito à folga em mancais, visando estabelecer uma relação entre a folga radial e os níveis de vibração. Posteriormente, serão analisadas as forças nos mancais superior e inferior.

Independentemente de outros parâmetros, sabe-se que toda a montagem eixo-mancal possui uma tolerância positiva (folga) (Figura 5.3).

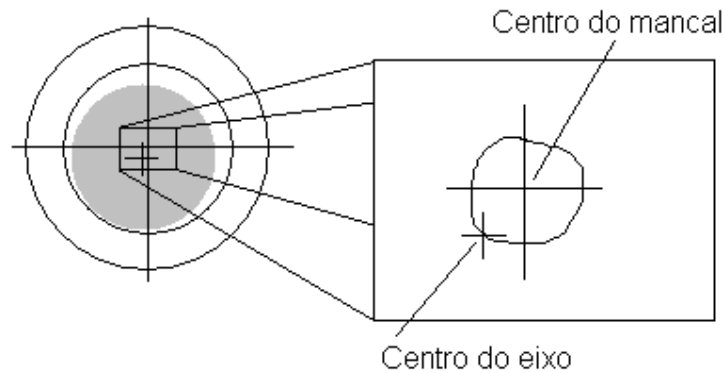


Figura 5. 3: Diferença entre centro do mancal e centro do eixo.

Além do mancal e eixo do compressor, um sistema semelhante poderia ser encontrado entre biela e eixo-excêntrico, mostrado na Figura 5.4.

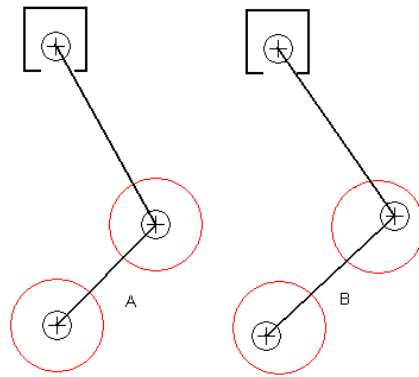


Figura 5. 4: Posição dos centros de eixo e biela - a) Fixo – b) Variável no tempo.

Sabe-se, do Capítulo 2, que a aceleração do pistão é obtida da derivada segunda da equação de movimento do pistão (Equação (2.8)). Esta, porém, depende do comprimento da biela e do excêntrico, em termos distintos.

A suposição que pode ser feita é que pode-se incluir naquela equação um termo variável no tempo e que dependa da folga entre mancal e eixo e excêntrico e biela. Através de programas de simulações de mancais, é possível estabelecer as órbitas experimentadas pelos componentes e determinar o termo dependente do tempo, nas equações de equilíbrio

dinâmico. É conveniente salientar que os dados desta análise são tomados através de suposições determinísticas, e não por dados obtidos experimental ou numericamente. Deve-se observar os resultados como frutos de um método alternativo e convergente ao cinemático. A Equação (2.8) pode ser reescrita na forma

$$y_p(t) = y_{eixo} - (L_e + de) \cdot \cos(\omega t) - (L_b + db) \cdot \cos w \quad (5.1)$$

sendo de e db funções do tempo

Na Figura 5.5 tem-se um exemplo de deslocamentos do mancal no tempo calculadas por um código de simulação de mancais utilizado no início do trabalho para determinação das rigidez e amortecimento dos mancais, obtendo-se valores adimensionais em função do ângulo de giro do eixo. A Figura 5.6 mostra as órbitas multiplicadas por 1000 para uma melhor visualização e as suas derivadas primeira.

Escolheu-se um termo dependente do tempo, com o perfil semelhante à pressão no cilindro, uma vez que as forças cinemáticas mostram este comportamento. A Figura 5.7 também mostra que o mancal simulado tem esta característica (curva azul). Deve ser mencionado que este sinal é normalizado pela tolerância inicialmente estipulada (10, 50 e 200 μm).

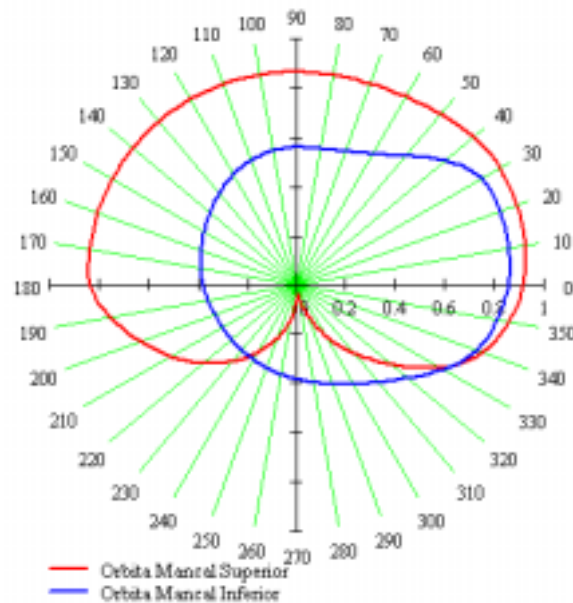


Figura 5. 5: Órbitas calculadas para um determinado mancal.

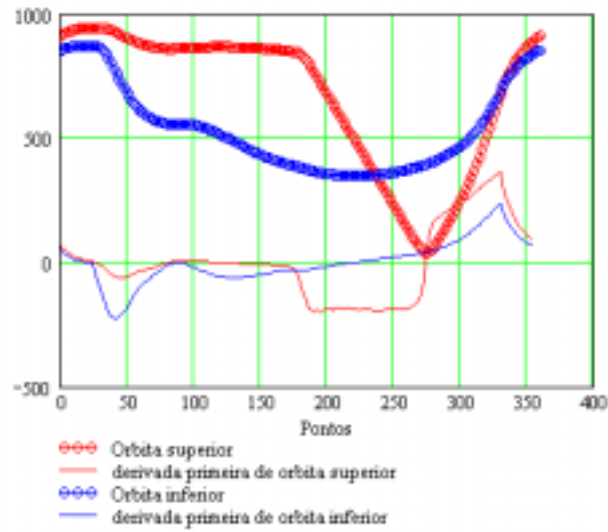


Figura 5. 6: Órbita e sua derivada com relação ao tempo.

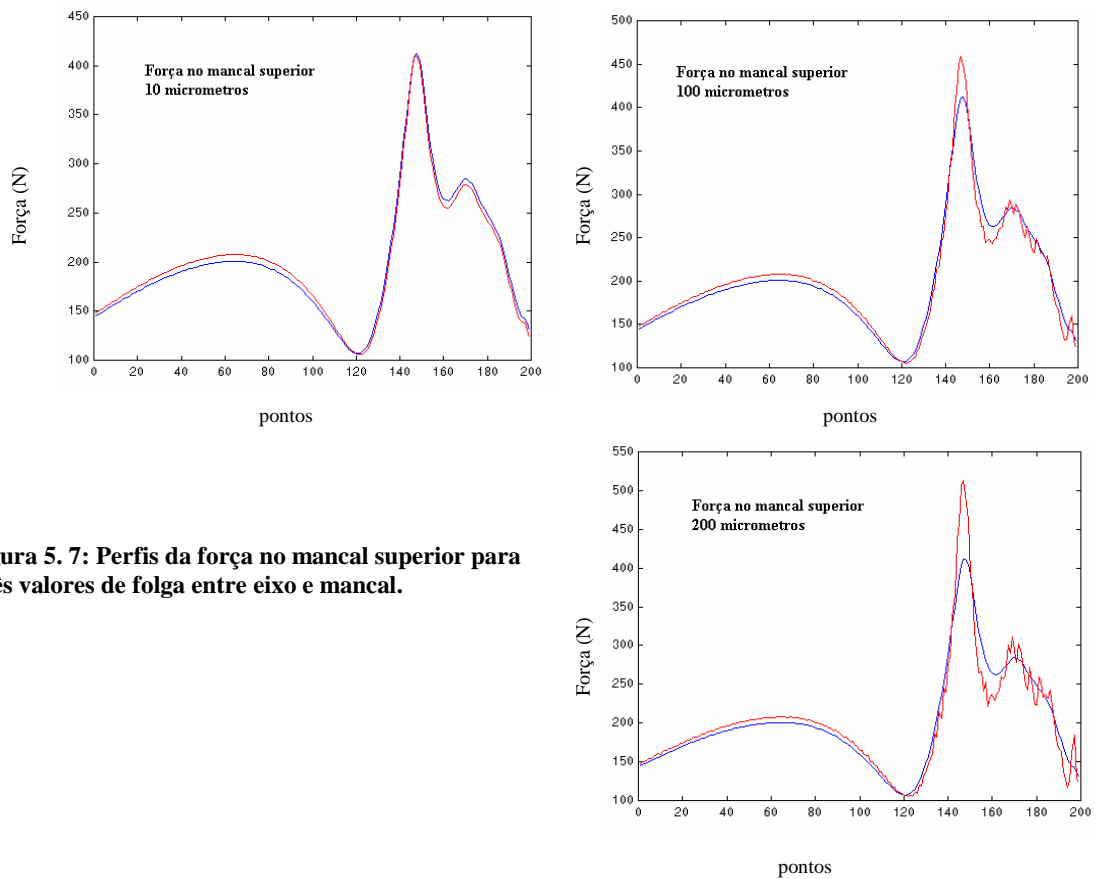


Figura 5. 7: Perfis da força no mancal superior para três valores de folga entre eixo e mancal.

Observa-se que os sinais adquirem componentes de alta frequência de destacada importância à medida que a folga aumenta. Isto pode ser melhor visualizado através de gráficos em banda estreita e 1/3 de oitava (Figuras 5.8 e 5.9, para 200 μm).

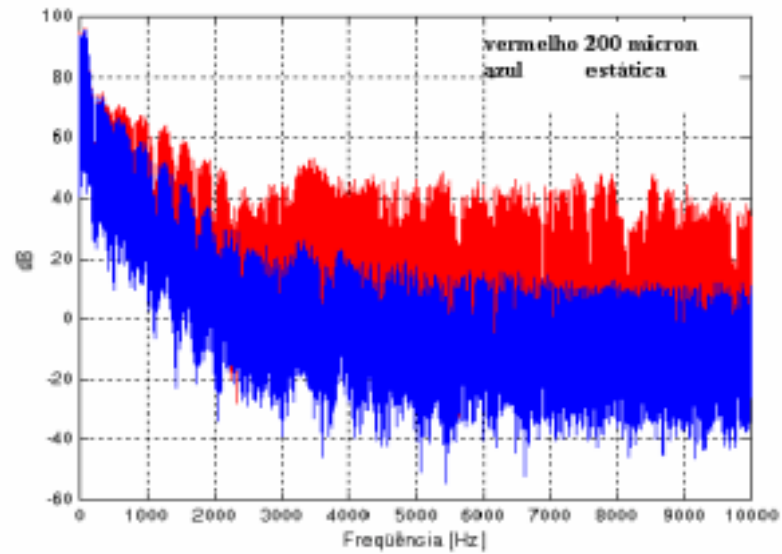


Figura 5. 8: Força no mancal superior – folga zero (cinemática) / folga 200 μm . Banda estreita.

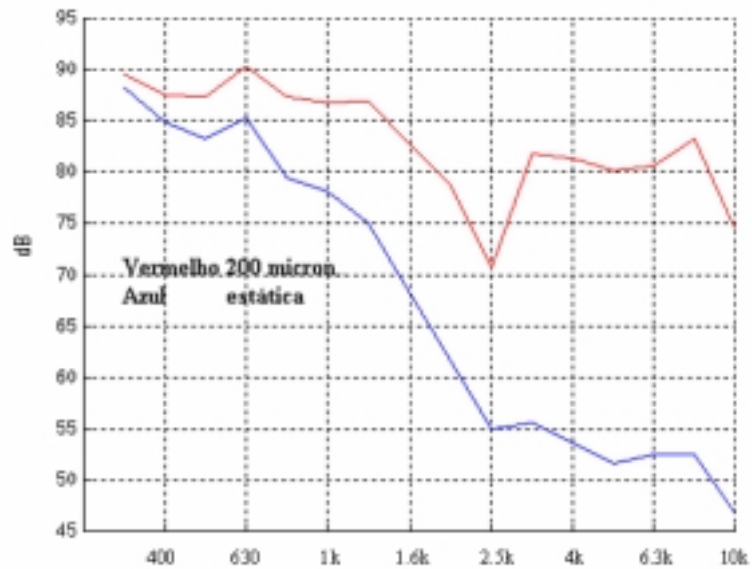


Figura 5. 9: Força no mancal superior – folga zero (cinemática) / folga 200 μm . Banda de 1/3 de oitava.

Estes resultados expressam a idéia central que, quanto menor a folga, os termos dependentes do tempo perdem importância, pois se aproximam muito da derivação obtida na cinemática, ou seja as forças resultantes nos mancais idênticas. Pesquisando o compressor hermético, encontram-se folgas máximas de 15 μm que, pela análise acima, causam pouca influência no sinal de força mais representativo : mancal superior na direção do pistão. Mas é

necessário confrontar este resultado com aquele obtido pela teoria de diferenças finitas, objeto deste trabalho, o qual considera rigidez e amortecimento do filme de óleo, em uma teoria mais complexa. Desta forma, obtém-se o sinal de força da cinemática (sem rigidez) e a curva obtida pela teoria de rigidez de filme de óleo na Figura 5.10.

As curvas mostram que as forças são idênticas em função do tempo. Na teoria cinemática não está envolvida nenhuma espécie de amortecimento e, portanto, outros parâmetros afetam a forma da força obtida. Novamente, uma análise do espectro de potência em banda estreita e 1/3 de oitava deve ser conduzida, para determinar as diferenças entre um método e outro. Verificando os espectros pode-se determinar a influência do filme de óleo sobre o comportamento dinâmico do modelo numérico.

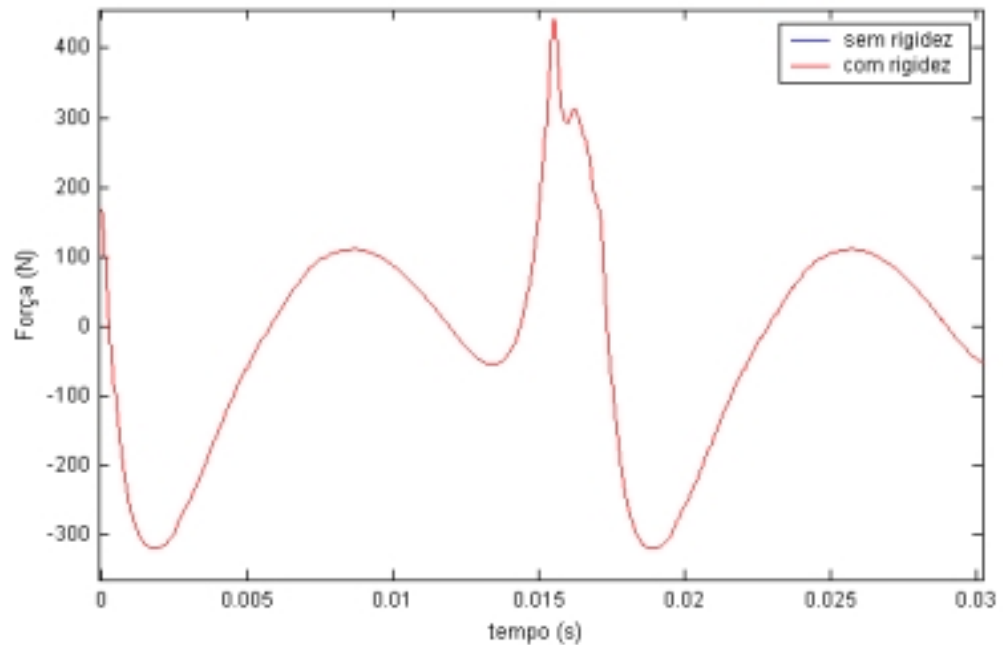


Figura 5. 10: Força no mancal superior – (diferença finitas - vermelha) / (cinemática – azul).

A Figura 5.11 mostra que existe nenhuma alteração entre o sinal calculado com a presença do filme de óleo e sem este. Nas bandas mostradas não se encontra nenhuma alteração também nos espectros calculados o que vem mostrar que para uma folga de 15 μm , como é o caso a influência do filme de óleo para a respostas de forças é insignificante, inclusive para frequências problemáticas para o estudo de ruído em compressores que estão por volta de 2 ~ 4 kHz.

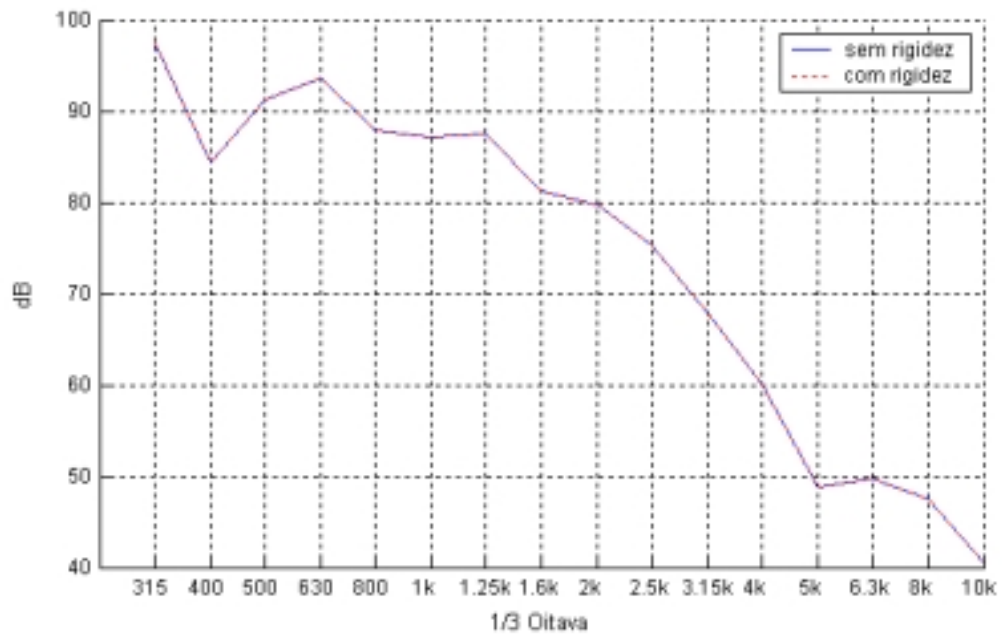


Figura 5. 11: Força no mancal superior – (cinemática - vermelha) / (diferenças finitas – azul).

Medições experimentais também foram realizadas para o compressor em funcionamento normal sobre molas em uma base rígida de aço. Foi utilizado um analisador de oito canais (HP3565) e as medições foram realizadas com acelerômetro B&K 4344, até 20 kHz para respostas planas na frequência,

Ainda, analisando a comparação numérico-experimental (Figura 5.12) obtida com as respostas do kit às excitações da cinemática e em funcionamento normal, pode-se concluir que os erros inerentes ao modelo, comparadas às respostas do modelo de filme de óleo, são significativas.

Na mesma figura as representações mostradas são as seguintes: “exp” seriam os valores experimentais e “num” os valores numéricos, e a extensão destes nomes “i” e “e” são medições e cálculos realizados para dois diferentes pontos.

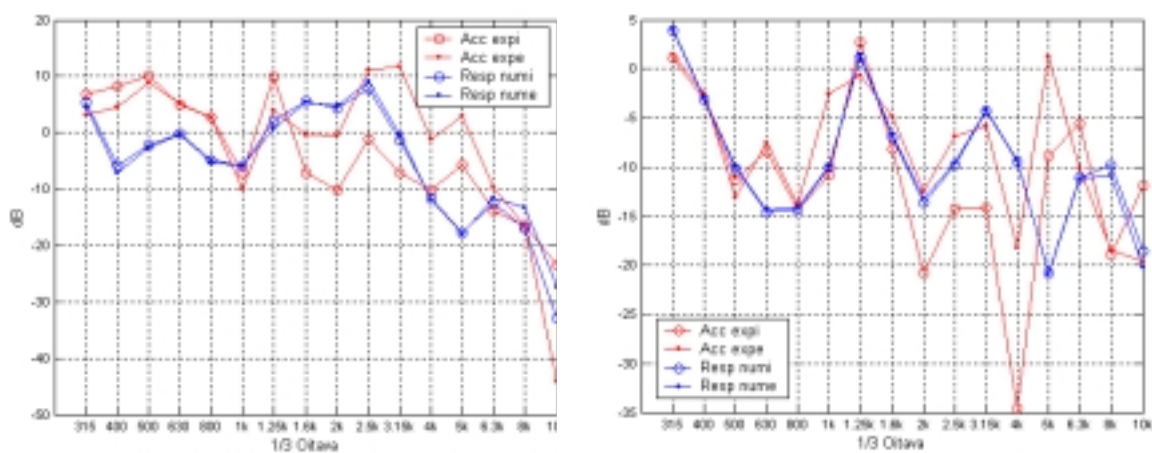


Figura 5. 12: Comparação numérica x experimental – Modelo do kit. Batente de molas – direção do pistão e transversal.

Capítulo 6 – Conclusões

O conhecimento prévio do comportamento dinâmico das variáveis de projeto do compressor utilizado em sistemas de refrigeração é de fundamental importância quando se deseja obter um produto final com alta qualidade, mais especificamente em relação ao ruído irradiado. Para isto, os vários trabalhos desenvolvidos no LVA – Laboratório de Vibrações e Acústica, desta Universidade, cujo tema foi o compressor hermético, procuraram estabelecer um vínculo muito próximo entre os desenvolvimentos teóricos, experimentais e numéricos, ou seja, a validação de procedimentos.

Como já é de conhecimento, o compressor hermético é composto por uma série de componentes que, quando em funcionamento, têm por função bombear o gás através do ciclo de refrigeração. Esta dissertação teve por objetivo estudar o comportamento dinâmico do contato entre as partes móveis, responsáveis pela compressão do gás, juntamente com os demais componentes.

Inicialmente, uma pesquisa bibliográfica foi elaborada com temas pertinentes ao ruído em compressores. Fez-se uma explanação sobre a cinemática do sistema pistão-biela-manivela-eixo do compressor, onde foram determinados os perfis de forças que atuam no bloco e que são utilizados como excitação no modelo numérico do kit (bloco, estator, batentes de molas e molas), em fase de desenvolvimento e validação experimental.

Posteriormente, passou-se a analisar o problema do contato flexível entre sistemas, inicialmente mais simples, para introduzir o método proposto para a solução e, promovendo um avanço gradativo na forma de um sistema mais complexo, com mais graus de liberdade, e analisando dinamicamente os efeitos de rigidez, amortecimento e inércia.

Finalmente, o modelo numérico do kit foi descrito, mostrando onde são aplicadas as reações obtidas pelo método da cinemática das partes móveis e como a modificação destas

forças, pela variação de parâmetros de projeto (especificamente tolerâncias), ou pela introdução deste novo conceito de flexibilidade de contato, afetam a resposta numérica.

O método empregado para a solução do sistema no tempo foi o equacionamento por diferenças finitas. O ciclo do compressor foi considerado com um tempo de aproximadamente 17 milissegundos (~ 59 Hz), com discretização suficiente para uma análise até 10 kHz, ou seja, frequências para as quais eram esperadas maiores influências dos filmes de óleo nas reações, principalmente, do mancal superior.

O modelo mais simples, com 1 grau de liberdade, foi explorado para entender e garantir a convergência, uma vez que um número menor de equações estão envolvidas. Desta forma pôde-se avançar na complexidade que a representação matemática dos componentes exigem e aumentar o número de graus de liberdade.

O modelo mais complexo mostrou que o efeito de amortecimento é muito superior ao efeito de rigidez (ver, por exemplo, a Figura 4.24, do Capítulo 4). Porém, a soma vetorial das reações devidas a estes efeitos igualam aos valores das forças de excitação, deixando a inércia das partes móveis com uma contribuição severamente reduzida, a ponto de ser desprezível para a modificação do sinal no domínio da frequência. Esta é uma afirmação baseada nos resultados de simulação dos filmes de óleo no mancal do compressor EGS 80, onde as folgas não superam 15 μm . É provável que os efeitos de rigidez e inércia comecem a ter uma maior influência a partir de folgas ou tolerâncias mais altas pois, apesar das massas de biela e pistão serem bem menores que a massa do rotor, têm deslocamentos bem superiores quando comparados aos deslocamentos dos mancais, por exemplo.

A princípio, julgava-se que as forças seriam modificadas em seus espectros, mas os resultados parciais, utilizando as variáveis de projeto deste tipo de compressor, mostraram o contrário. A explicação pode ser atribuída ao fato da rigidez do filme de óleo entrar no sistema como uma variável ao longo do ciclo de sucção-compressão, com pontos de máximos e mínimos. Se o amortecimento tivesse menor influência é bem provável que fossem detectados picos de resposta devidas à rigidez do filme de óleo. Mas o fato é que o sistema comporta-se como superamortecido, fazendo com que a energia atribuída à rigidez seja distribuída ao longo do espectro.

Como conclusão final, de acordo com os objetivos inicialmente estipulados, a resolução de um sistema de equilíbrio dinâmico que representasse os mancais do compressor EGS 80 mostrou que o filme de óleo não trouxe uma influência significativa para as respostas de forças. Portanto, sugere-se manter o equacionamento do Capítulo 2 como forma de considerar as excitações no modelo numérico, pois se trata de uma derivação simples, da qual

obtêm-se perfis de força através de equações que podem ser facilmente implantadas em rotinas de cálculo. As imprecisões dos resultados deste modelo indicam serem necessários estudos adicionais, seja com a inclusão de efeitos eletromagnéticos, seja no aprimoramento do sistema descrito nesta dissertação.

Sabendo que as vibrações do conjunto moto-compressor são excitadas principalmente pelas forças de compressão do gás e que dois dos caminhos de transmissão para a carcaça são as molas de suspensão e o tubo de descarga, as partes móveis são consideradas as transmissoras dessa energia, porém, passando pelos filmes de óleo antes de atingir o irradiador final: a carcaça. Este estudo permitiu ampliar o conhecimento do comportamento dinâmico do compressor à medida que foram levantadas questões relativas às variáveis de projeto e como estas interferem no balanço dinâmico do compressor.

Cabe ressaltar que inicialmente pretendia-se equacionar, juntamente com os filmes de óleo dos mancais, os contatos biela-excêntrico e biela-pistão. Este sistema acabou gerando divergências. Desta forma, os estudos aqui descritos ficaram limitados ao mancal do eixo, devido às maiores amplitudes de forças estarem neste ponto.

Pode-se sugerir, para trabalhos futuros, um estudo mais detalhado do efeito do filme de óleo com uma resolução do sistema tridimensionalmente, buscando estabelecer um melhor entendimento dos perfis espaciais de pressão do filme de óleo nos componentes. Outro passo seria a melhoria do modelo atual buscando englobar também os componentes biela e pistão juntamente com o filme de óleo presente entre estes, assim, incorporando todos os elementos na matriz dinâmica. Finalmente, pode-se utilizar o modelo atual com variação de parâmetros de projeto e buscar uma validação experimental, para estabelecer os níveis de confiabilidade da ferramenta computacional para as mais diversas formas construtivas da engenharia mecânica.

Referências bibliográficas

- [1] Crucq, J., *Modelling of noise sources in refrigeration compressors*. Inter-Noise 88 pg. 817-820.
- [2] Paiotti, L. R., *Vibrações induzidas pelo campo eletromagnético no estator de motores de indução de compressores herméticos*. Dissertação de mestrado, UFSC, 2002.
- [3] Pinkus, O., *The Reynolds Centennial: A brief History of the theory of Hydrodynamic Lubrification*, Journal of Tribology, vol. 109, pg. 2-20, 1987.
- [4] Newkirk, B. L., Taylor, H. D., *Shaft whipping due to oil action in Journal Bearings*, General Electric Review, vol. 28, n. 8, pg. 559-568, 1925.
- [5] R. W. Armentrout e G. E. Wilson, *Reduced shaft stiffness lowers running-speed bearing loads and vibration in a single stage compressor*. Proceedings of the Twenty-second Turbomachinery Symposium, pg. 33-93.
- [6] I. U. Haq, *Experimental evaluation of the damping factor of various rotor-bearing configuration*. ASME-International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, 1994, pg. 1-8.
- [7] H. Hashimoto, *Analysis of step journal bearings by semianalytical finite element method*, 1985, pg. 93-102.

- [8] Hattori, H. *Dynamic analysis of a rotor-journal bearing system with large dynamic loads (stiffness and damping coefficient variations in bearing oil films)*. JSME-International Journal, vol. 36 - n 2, 1993, pg. 251-257.
- [9] Campbell, A., Love, P. P., Martin, F. A., Rafique, S. O., *Bearings for reciprocating machinery: A Review of the Present State of Theoretical, experimental and Service knowledge*, Proc. Inst. Of Mech. Engrs., vol. 182 Pt 3A, pg 51-74, 1967-68.
- [10] Lund, J. W. e Thomsen, K. K. *A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil*. Lubricated Journal Bearings, The Design Engineering Conference Chicago, Illinois, 1978, pg. 1-28.
- [11] Manke, A. L. *Uma metodologia de cálculo para a simulação de mancais radiais submetidos a carregamento dinâmico*. Dissertação de mestrado, UFSC, 1991.
- [12] Goodwin, M. J. *Dynamics of rotor-bearing systems*. London.
- [13] C. R. Burrows, R. Sayed-Esfahani e R. Stanway, *A comparison of multifrequency techniques for measuring the dynamics of squeeze-film bearing*. Journal of Lubrification Technology, 1981, January, vol. 103, pg. 137-143.
- [14] C. R. Burrows e M. N. Sahinkaya, *Frequency domain estimation of linearized oil-film coefficients*. Journal of Lubrification Technology, 1982, April, vol. 104, pg. 210-215.
- [15] Wisbert, H. J., *Uma nova metodologia de solução para sistemas de mancais radiais em carregamento dinâmico incluindo atrito sólido e desgaste*, Dissertação de mestrado, UFSC, 2000.
- [16] Rao, S. S. *Mechanical vibrations*, Addison-Wesley Publishing Company Canadá, 1986.
- [17] Thomson, W. T. *Theory of vibration with application*, Prentice-Hall Inc. New Jersey-USA, 1972.

Apêndice A - Método diferenças finitas

A idéia básica dos vários métodos de diferenças finitas existentes é a de substituir as derivadas de uma equação diferencial por aproximações baseadas em expansões das séries de Taylor na região dos pontos de interesse.

Para ilustrar a fundamentação matemática em questão, faz-se em primeiro lugar uma aproximação de uma função $f(x)$, qualquer por diferenças finitas, como é observado na Figura A.1:

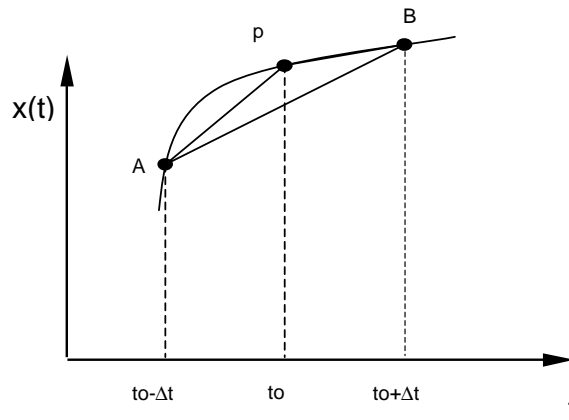


Figura A. 1: Função genérica.

Faz-se uma aproximação da derivada de 1ª ordem da função (Figura A.1) no ponto P, pela inclinação do segmento PB, obtendo-se:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

ou pela inclinação do segmento AP:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0) - x(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{A.2})$$

ou ainda pela inclinação do segmento AB:

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (\text{A.3})$$

Pode-se estimar a derivada segunda de $f(x)$ em P, através de:

$$\ddot{x}(t_0) \cong \frac{1}{\Delta t} [\dot{x}(t_0 + \Delta t / 2) - \dot{x}(t_0 - \Delta t / 2)] \quad (\text{A.4})$$

sendo:

$$\dot{x}(t_0 + \Delta t / 2) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\dot{x}(t_0 - \Delta t / 2) = \frac{x(t_0) - x(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo-se as Equações (A.5) e (A.6) em (A.4):

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - \frac{x(t_0) - x(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \right] \quad (\text{A.7})$$

ou

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - 2x(t_0) + x(t_0 - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (\text{A.8})$$

Como o objetivo de ilustrar a obtenção das derivadas recorreu-se à visualização da função $x(t)$, que tornou sua dedução um tanto intuitiva. Geralmente estas aproximações são feitas através de Séries de Taylor.

Se a função $x(t)$ e suas derivadas \dot{x} , \ddot{x} , $\ddot{\ddot{x}}$, ... são contínuas em t , logo se pode fazer a expansão em Série de Taylor da função no ponto t_0 :

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \ddot{x}(t_0)\frac{\Delta t^2}{2!} + \ddot{x}(t_0)\frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.9})$$

$$x(t_0 - \Delta t) = x(t_0) - \dot{x}(t_0)\Delta t + \ddot{x}(t_0)\frac{\Delta t^2}{2!} - \ddot{x}(t_0)\frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.10})$$

Somando as Equações (A.9) e (A.10), obtém-se:

$$x(t_0 + \Delta t) + x(t_0 - \Delta t) = 2x(t_0) + (\Delta t)^2 \ddot{x}(t_0) + O(\Delta t)^4 \quad (\text{A.11})$$

e calculando a diferença entre as duas Equações:

$$x(t_0 + \Delta t) - x(t_0 - \Delta t) = 2\dot{x}(t_0)\Delta t + O(\Delta t)^3 \quad (\text{A.12})$$

onde $O(\Delta t)^4$ e $O(\Delta t)^3$ serão os erros introduzido pelo truncamento da série. Esse erro será da ordem de $(\Delta t)^4$ e $O(\Delta t)^3$. Com a omissão dos termos $O(\Delta t)^4$ e $O(\Delta t)^3$ tem-se para derivada segunda e derivada primeira, a partir das Equações (A.11) e (A.12):

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - 2x(t_0) + x(t_0 - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (\text{A.14})$$

De acordo com a nomenclatura utilizada no texto, com $t_0 = i$, $t_0 + \Delta t = i + 1$, e $t_0 - \Delta t = i - 1$, então tem-se:

$$\ddot{x}(i) = \frac{x(i + 1) - 2x(i) + x(i - 1)}{(\Delta t)^2} \quad (\text{A.13})$$

para $i \geq 2$

$$\dot{x}(i) = \frac{x(i + 1) - x(i - 1)}{2\Delta t} \quad (\text{A.14})$$

Para valores iniciais de $i \leq 2$ utiliza-se:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \Delta t \quad (\text{A.16})$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \ddot{x}_1 \Delta t^2 \quad (\text{A.17})$$

